INTERNASIONALE SEKONDÊRE SERTIFIKAAT-EKSAMEN
NOVEMBER 2023

# VERDERE STUDIES WISKUNDE (STANDAARD): VRAESTEL I

## NASIENRIGLYNE

Tyd: 2 uur 200 punte

---

**Hierdie nasienriglyne is opgestel vir gebruik deur eksaminators en hulpeksaminators van wie verwag word om almal 'n standaardiseringsvergadering by te woon om te verseker dat die riglyne konsekwent vertolk en toegepas word by die nasien van kandidate se skrifte.**

**Die IEB sal geen bespreking of korrespondensie oor enige nasienriglyne voer nie. Ons erken dat daar verskillende standpunte oor sommige aangeleenthede van beklemtoning of detail in die riglyne kan wees. Ons erken ook dat daar sonder die voordeel van die bywoning van 'n standaardiseringsvergadering verskillende vertolkings van die toepassing van die nasienriglyne kan wees.**

---

IEB Copyright © 2023

## VRAAG 1

1.1 Los op:

(a) $\ln(2+e^{-x})=2$ (Laat jou antwoord in die vorm $x=\ln(....)$.)

$e^2=2+e^{-x}$
$e^{-x}=e^2-2$
$-x=\ln(e^2-2)$
$x=-\ln(e^2-2)$
$x=\ln\left(\frac{1}{e^2-2}\right)$

(b) $|2x+3|=3x+4$

$2x+3=3x+4$ of $2x+3=-3x-4$
$x=-1$ of $x=-\frac{7}{5}$
kontrolering toon slegs $x=-1$

1.2 Gee in standaardvorm $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ 'n vierdegraadsvergelyking wat $x=2+\sqrt{3}$ en $2-i$ as wortels het. Die waardes van *a, b, c, d* en *e* moet rasionaal wees.

Een tweedegraadsvorm het wortels $2+\sqrt{3}$ en $2-\sqrt{3}$
die som van hierdie wortels is 4 en die produk is 1 dus $x^2-4x+1=0$
die ander het wortels $2-i$ en $2+i$
die som van hierdie wortels is 4 en die produk is 5 dus $x^2-4x+5=0$
$(x^2-4x+1)(x^2-4x+5)=0$
$x^4-8x^3+22x^2-24x+5=0$

1.3 Bepaal positiewe reële waardes van *a* en *b* indien:

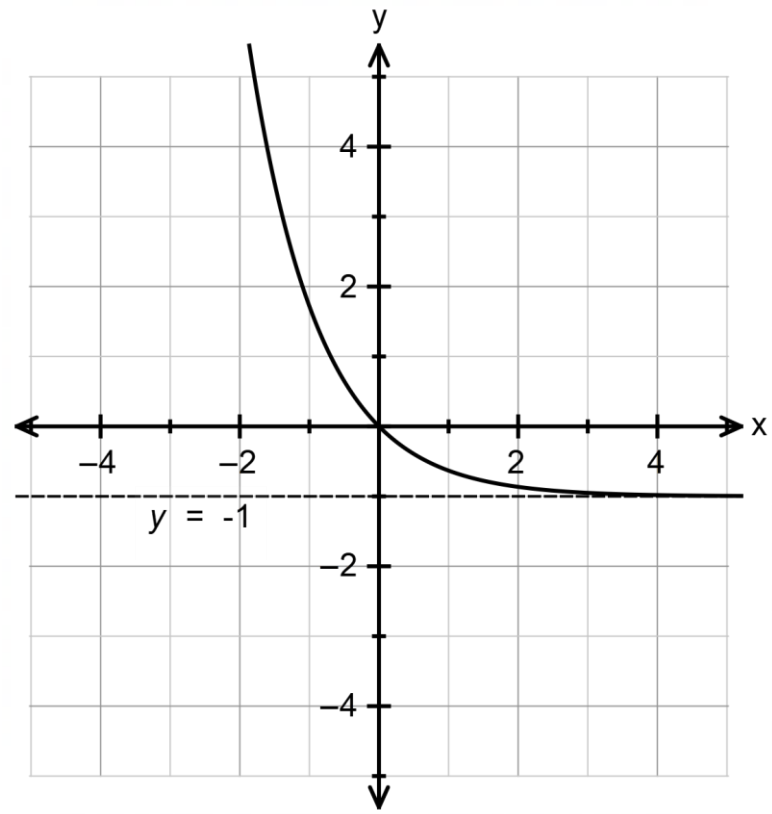
$(a+bi)(b+i)=(2b+a)i$
$\text{LK}=ab-b+(b^2+a)i$

dus $ab-b=0$ en $b^2+a=2b+a$
dus $b(a-1)=0$
aangesien $b\neq 0,\ a=1$
$\therefore b=2$

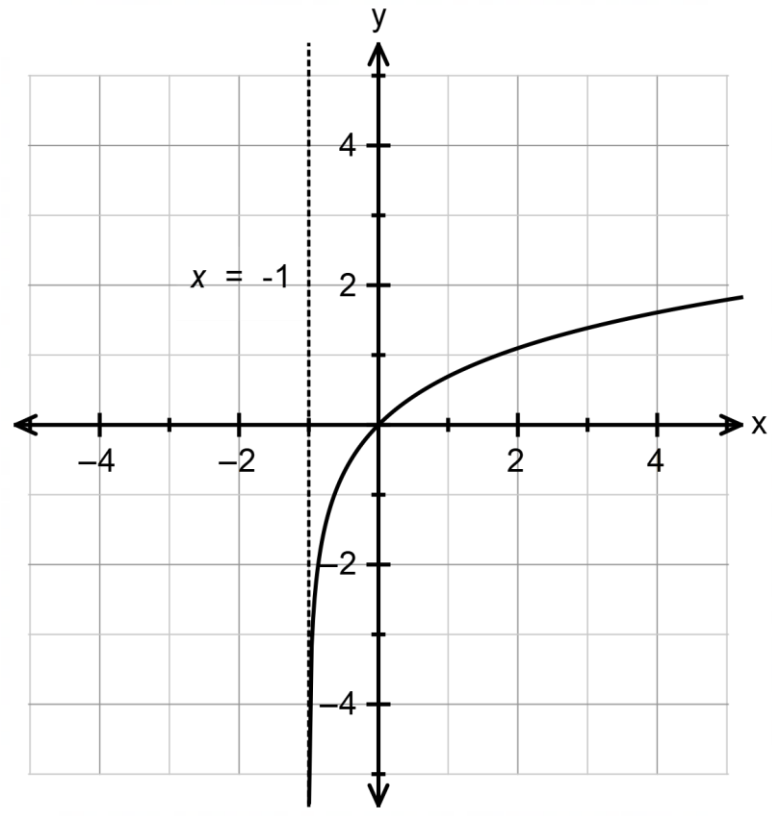
IEB Copyright © 2023 

1.4. Skets die volgende funksies op die asse wat voorsien word. Jy moet die vergelykings van enige asimptote gee en die asimptote teken, en ook enige afsnitte met die asse toon.

(a) $y = e^{-x} - 1$




(b) $y = \ln(x+1)$



**VRAAG 2**

Gebruik volledige induksie om te bewys dat:

$$-1+4-9+16-25+.....(-1)^n n^2 = \frac{(-1)^n n(n+1)}{2} \text{ vir } n \in \mathbb{N}$$

indien $n=1$ LK $=-1$ en RK $=-1$ dus is dit waar vir $n=1$

neem aan waar vir vir $n=k$

$$-1+4-9+16-25+.....(-1)^k k^2 = \frac{(-1)^k k(k+1)}{2}(*)$$

beskou nou $n=k+1$

$$\begin{aligned}-1+4-9+16-25+.....(-1)^k k^2+(-1)^{k+1}(k+1)^2 &= \frac{(-1)^k k(k+1)}{2}+(-1)^{k+1}(k+1)^2 \\ &= (-1)^k\left[\left(\frac{k(k+1)}{2}-(k+1)^2\right.\right] \\ &= (-1)^k\left[\left(\frac{k(k+1)}{2}-\frac{2(k+1)^2}{2}\right.\right] \\ &= (-1)^k\left[\frac{(k+1)(k-2(k+1))}{2}\right] \\ &= (-1)^k\left[\frac{(k+1)(-k-2)}{2}\right] \\ &= (-1)^{k+1}\left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]\end{aligned}$$

maar dit is net (*) met $n=k+1$

dus het ons dit waar bewys vir $n=k+1$

$\therefore$ deur volledige induksie het ons dit bewys vir $n \in \mathbb{N}$

IEB Copyright © 2023 

## VRAAG 3

Bepaal $\frac{d}{dx}\sqrt{3x}$ uit eerste beginsels.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{3(x+h)} - \sqrt{3x}}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{3(x+h)} - \sqrt{3x}}{h} \times \frac{\sqrt{3(x+h)} + \sqrt{3x}}{\sqrt{3(x+h)} + \sqrt{3x}}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{3(x+h) - 3x}{h\left(\sqrt{3(x+h)} + \sqrt{3x}\right)}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{3x + 3h - 3x}{h\left(\sqrt{3(x+h)} + \sqrt{3x}\right)}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{3h}{h\left(\sqrt{3(x+h)} + \sqrt{3x}\right)}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{3}{\left(\sqrt{3(x+h)} + \sqrt{3x}\right)}$$

$$f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x}}$$

IEB Copyright © 2023 

**VRAAG 4**

Beskou die funksie $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 7}{x - 2}$.

(a) Bepaal, met klassifikasie, die vergelykings van enige asimptote.

vertikale asimptoot: $x = 2$

$x^2 - 5x + 7 = (x - 2)(x - 3) + 1$

dus $\dfrac{x^2 - 5x + 7}{x - 2} = x - 3 + \dfrac{1}{x - 2}$

dus $y = x - 3$ is 'n skuins asimptoot

(b) Regverdig wiskundig waarom die funksie nie enige *x*-afsnitte het nie.

$\dfrac{x^2 - 5x + 7}{x - 2} = 0$

$\therefore x^2 - 5x + 7 = 0$

maar $\Delta = (-5)^2 - 4(1)(7) = -3$

$\therefore$ geen reële wortels nie

(c) Bepaal die koördinate van enige stasionêre punte.

$f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 7}{x - 2}$

$f'(x) = \dfrac{(2x - 5)(x - 2) - 1(x^2 - 5x + 7)}{(x - 2)^2}$

$f'(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{(x - 2)^2} = 0$

$\therefore x^2 - 4x + 3 = 0$

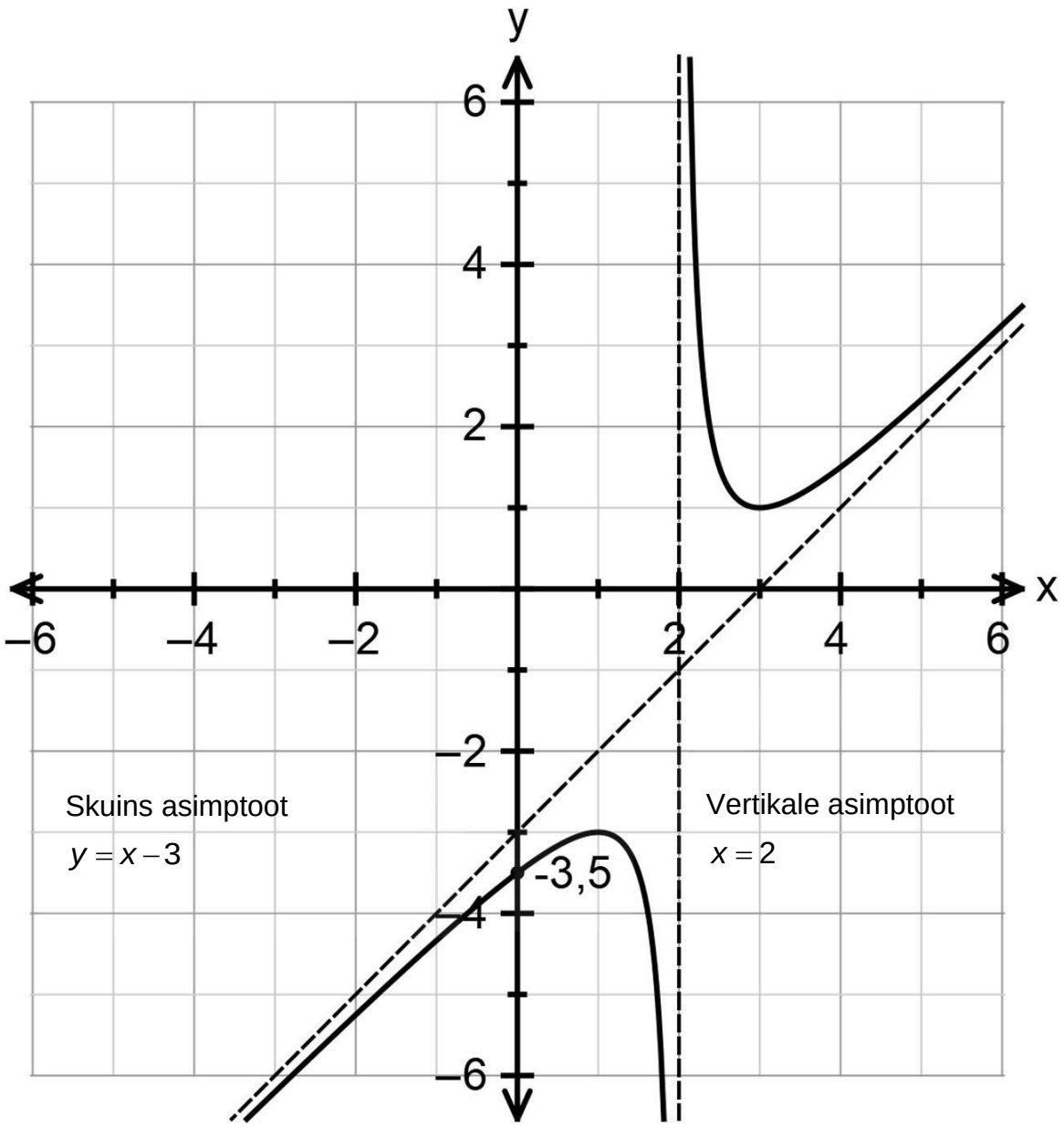
$\therefore (x - 1)(x - 3) = 0$

$\therefore x = 1 \quad \text{of} \quad 3$

$\therefore (1\ ;\ -3) \quad \text{of} \quad (3\ ;\ 1)$

IEB Copyright © 2023 

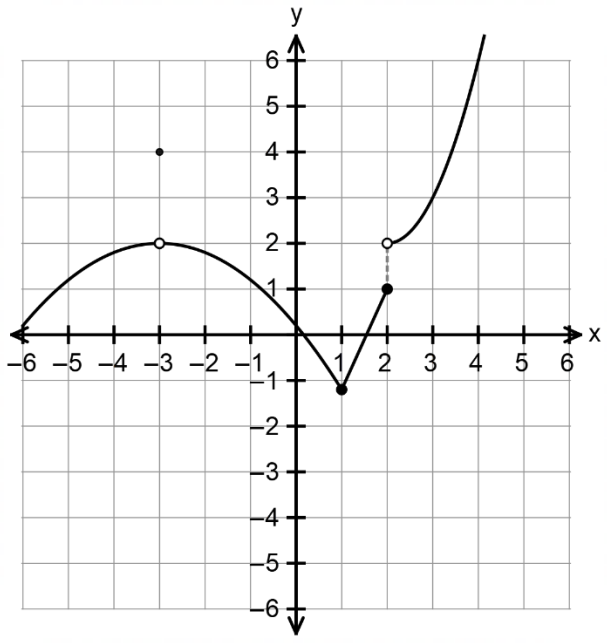
(d) Teken die grafiek van *f* op die asse wat voorsien word en toon alle punte van belang. Jy moet enige asimptote teken en benoem.



## VRAAG 5

5.1 Teken op die asse wat voorsien word 'n **funksie** *g* wat die volgende bevredig:

- *g* is kontinu vir alle waardes van *x* behalwe by $x = -3$ en $x = 2$
- $g(-3) = 4$ en $\lim\limits_{x \to -3} g(x)$ bestaan
- $g(2) = 1$ en $\lim\limits_{x \to 2^-} g(x) = 1$, maar daar is 'n sprongdiskontinuïteit by $x = 2$
- *g* is ook nie differensieerbaar by $x = 1$ nie




5.2 Druk die volgende bewerings uit deur **wiskundige notasie te gebruik**:

(a) Die linker- en regterlimiet van *g* by $x = a$ is ongelyk.

$$\lim_{x-a^-} g(x) \neq \lim_{x \to a^+} g(x)$$

(b) *h* is nie differensieerbaar by *p* nie ten spyte daarvan dat dit kontinu is by $x = p$.

$$\lim_{x \to p^-} h'(x) \neq \lim_{x \to p^+} h'(x)$$

5.3 Antwoord waar of onwaar op elkeen van die volgende bewerings:

(a) Indien 'n funksie differensieerbaar is by 'n punt, is dit kontinu by daardie punt.

WAAR

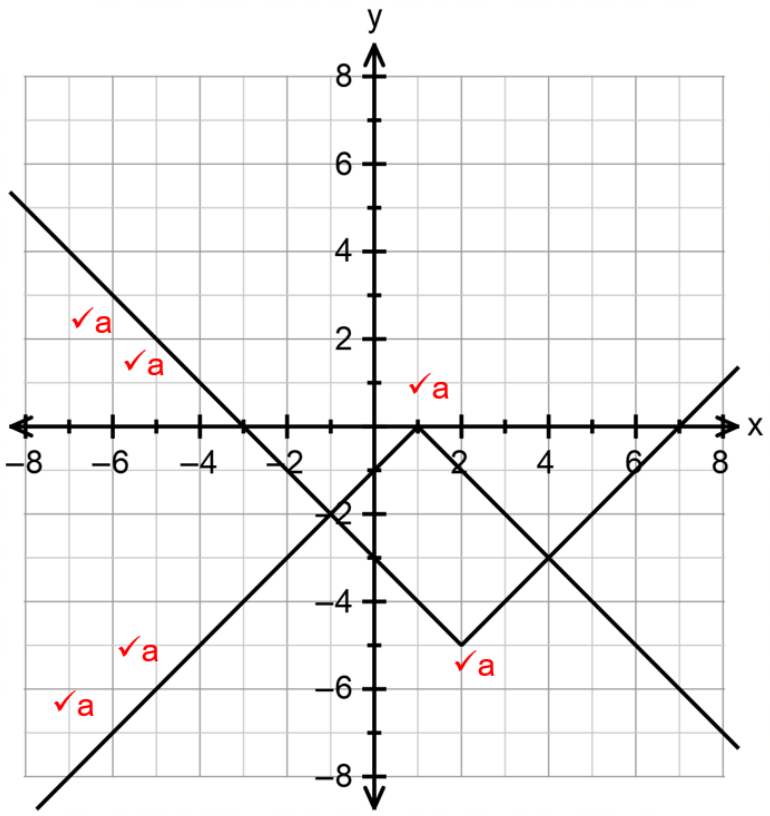
(b) Indien 'n funksie nie differensieerbaar is by 'n punt nie, is dit nie kontinu by daardie punt nie.

ONWAAR

IEB Copyright © 2023 

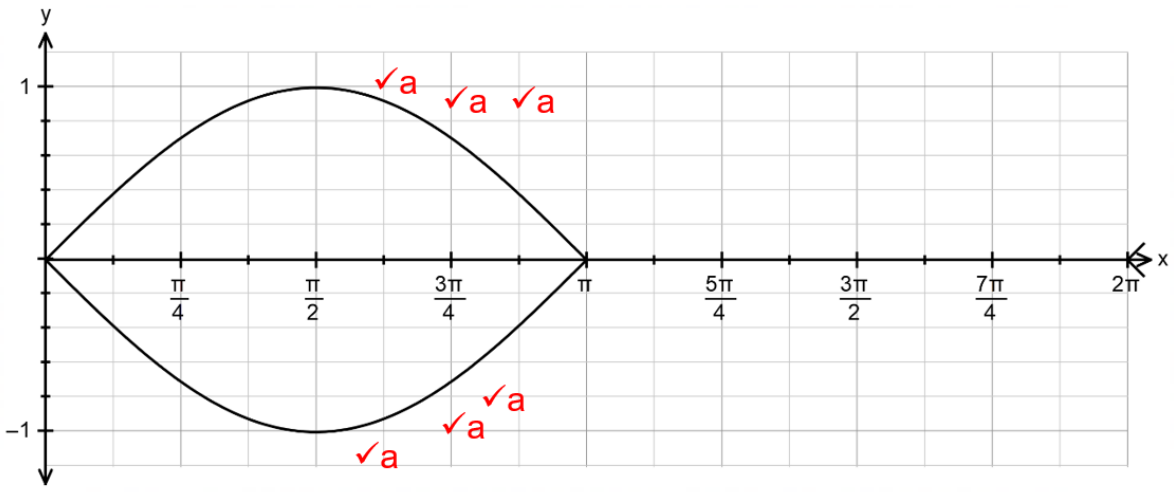
## VRAAG 6

6.1 Gebruik die asse hieronder om $|x-2|-5 \geq -|x-1|$ op te los deur die **grafieke van twee funksies** te skets. Jy moet die grafieke wat jy geteken het met hul vergelykings benoem.




$x \leq -1$ of $x \geq 4$

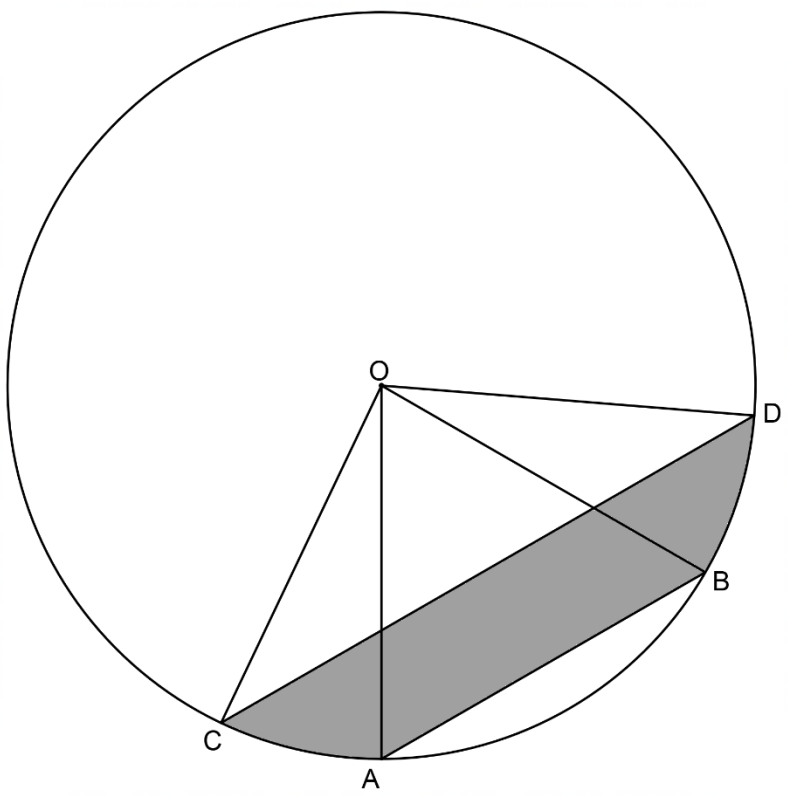
6.2 Teken die grafiek van $|y| = \sin x$ op die asse wat voorsien word en toon alle punte van belang.



## VRAAG 7

In die diagram hieronder is driehoek AOB gelyksydig met sye van 1 eenheid.
O is die middelpunt van die sirkel en $CD = \sqrt{3}$ eenhede.

Bepaal die gearseerde oppervlakte.




$$\cos\left(C\hat{O}D\right) = \left(\frac{1^2 + 1^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2}{2(1)(1)}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore C\hat{O}D = \pi - \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

Oppervlakte sektor $OCD = \frac{1}{2}(1^2)\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{2\pi}{6}$

hiervan moet ons aftrek $\Delta OCD = \frac{1}{2}(1)(1)\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

en die segment gevorm deur $AB = \frac{1}{2}\left(1^2\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$

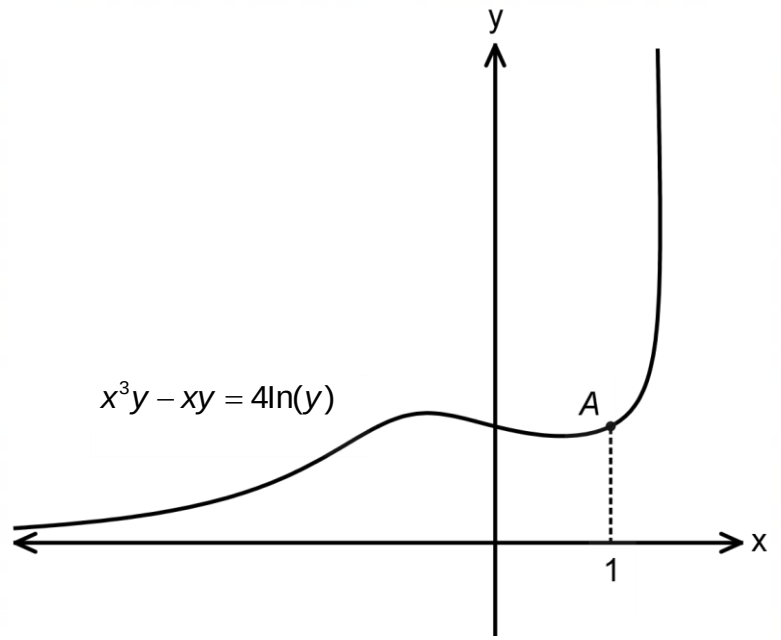
dus gearseerde oppervlakte $= \left(\frac{2\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) - \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

dus gearseerde oppervlakte = $\frac{\pi}{6} = 0{,}52$ eenhede$^2$

IEB Copyright © 2023 

## VRAAG 8

'n Gedeelte van die grafiek van die implisiet gedefinieerde verwantskap $x^3y - xy = 4\ln(y)$ word hieronder getoon.




(a) Bepaal die *y*-koördinaat van punt A en toon alle berekeninge.

$1^3y - 1y = 4\ln(y)$
$0 = 4\ln(y)$
$\ln(y) = 0$
$y = 1$
$\therefore A(1;1)$

(b) Bepaal die vergelyking van die raaklyn aan die kromme by die punt A.

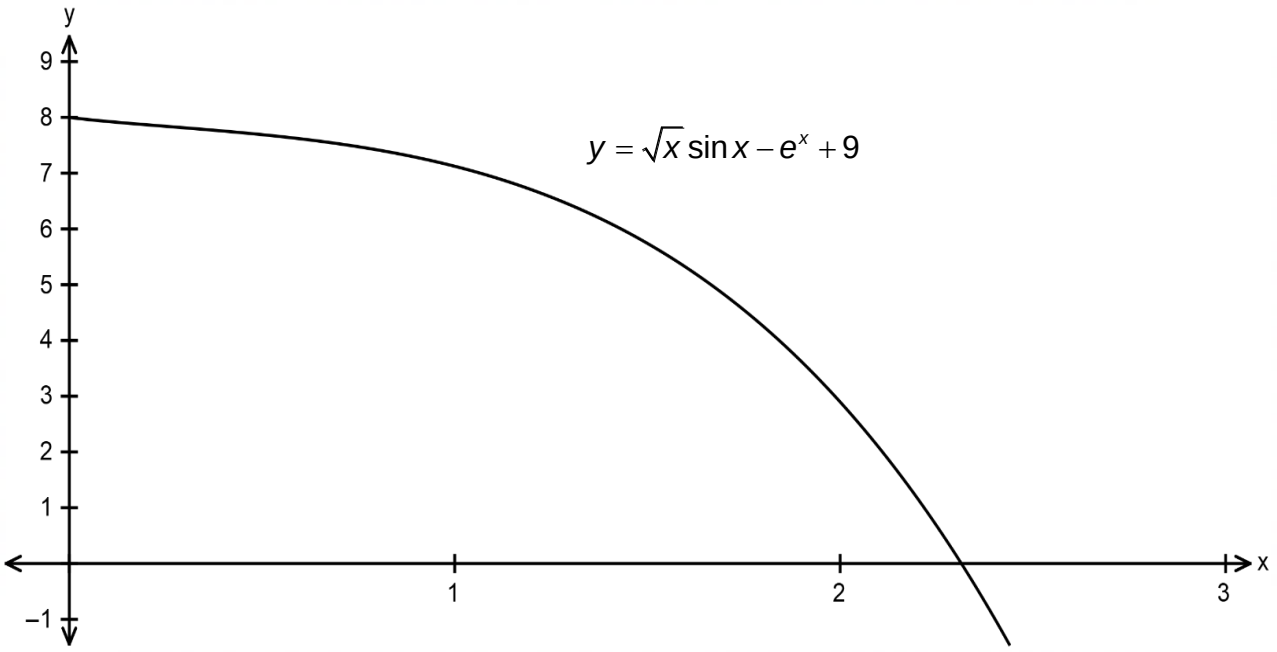
$x^3y - xy = 4\ln(y)$
implisiete differensiasie lewer:

$$3x^2y + x^3\frac{dy}{dx} - y - x\frac{dy}{dx} = \frac{4}{y}\cdot\frac{dy}{dx}$$
$$x^3\frac{dy}{dx} - x\frac{dy}{dx} - \frac{4}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = y - 3x^2y$$
$$\frac{dy}{dx}\left(x^3 - x - \frac{4}{y}\right) = y - 3x^2y$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - 3x^2y}{x^3 - x - \frac{4}{y}}$$
by $A$: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$
$$y - 1 = \frac{1}{2}(x - 1)$$
$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

## VRAAG 9

Die funksie $f(x) = \sqrt{x}\sin x - e^x + 9$ word hieronder getoon.

Gebruik die Newton-Raphson-metode om die *x*-afsnit tot 5 desimale plekke te bepaal deur $x_0 = 2$ as 'n aanvanklike raaiskoot te gebruik.




Jy moet die volgende toon:

- die iteratiewe formule wat jy gebruik
- $x_1$ tot 5 desimale plekke

Jy hoef **nie** al jou benaderings neer te skryf nie.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\sqrt{x}_n \sin x_n - e^{x_n} + 9}{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\sin x_n + \sqrt{x}_n \cos x_n - e^{x_n}}$$

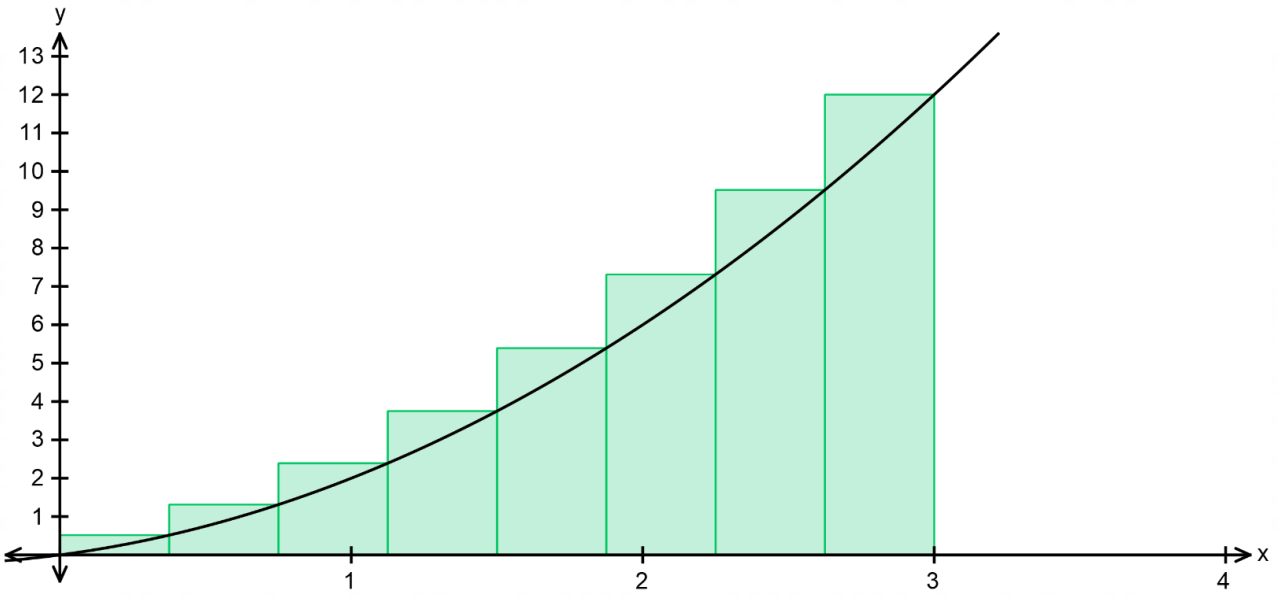
$$x_1 = 2{,}37838$$

$$x = 2{,}31448$$

IEB Copyright © 2023 

## VRAAG 10

Kofi probeer om die oppervlakte onder die kromme $y = x^2 + x$ van $x = 0$ tot $x = 3$ uit te werk deur dit in reghoeke te verdeel soos getoon.




Hy het korrek uitgewerk dat wanneer hy *n* reghoeke gebruik, die oppervlakte gegee word deur:

$$A = 13{,}5 + \frac{18}{n} + \frac{27}{6n^2}.$$

Hy gebruik sy formule en eindig met 'n fout van $13\frac{2}{3}\%$. Hoeveel reghoeke het hy gebruik?

presiese antwoord $= \int_0^3 x^2 + x \, dx = 13{,}5$

$$\therefore \frac{A - 13{,}5}{13{,}5} \times 100 = \frac{41}{3}$$

$$\therefore A = \frac{41}{300} \times 13{,}5 + 13{,}5$$

$$\therefore A = 15{,}345$$

$$\therefore 13{,}5 + \frac{18}{n} + \frac{27}{6n^2} = 15{,}345$$

$$\therefore 81n^2 + 108n + 27 = 92{,}07n^2$$

$$\therefore 11{,}07n^2 - 108n - 27 = 0$$

$$\therefore n = 10$$

IEB Copyright © 2023 

**VRAAG 11**

Bepaal die volgende integrale:

(a) $\int \sin^2 x\,dx$

$\cos 2x = 1-2\sin^2 x$
$\therefore 2\sin^2 x = 1-\cos 2x$
$\therefore \sin^2 x = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x$
$= \int \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x\ dx$
$= \frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}+c$

(b) $\int x\sqrt{x+1}\,dx$

laat $u = x+1$ dan $x = u-1$
en $du = dx$
$= \int (u-1)u^{\frac{1}{2}}\,du$
$= \int u^{\frac{3}{2}}-u^{\frac{1}{2}}\,du$
$= \frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+c$
$= \frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+c$

Alternatiewelik:

$\int x\sqrt{x+1}\,dx$
stuksgewys
laat $f(x) = x$ dan $f'(x) = 1$ en laat $g'(x) = (x+1)^{\frac{1}{2}}$ dan $g(x) = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}$
$= \frac{2}{3}x(x+1)^{\frac{3}{2}}-\int \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\,dx$
$= \frac{2}{3}x(x+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}\int (x+1)^{\frac{3}{2}}\,dx$
$= \frac{2}{3}x(x+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}\times\frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}}$
$= \frac{2}{3}x(x+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{4}{15}(x+1)^{\frac{5}{2}}+c$

IEB Copyright © 2023 

(c) $\int \frac{2x+3}{x^2+6x+9}dx$

$$\frac{2x+3}{(x+3)^2} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{(x+3)^2}$$

$$\therefore 2x+3 = A(x+3)+B = Ax+(3A+B)$$

$$\therefore A = 2 \text{ en } 3(2)+B = 3 \text{ dus } B = -3$$

$$= \int \frac{2}{x+3}dx - \int \frac{3}{(x+3)^2}dx$$

$$= 2\ln|x+3| - 3\int (x+3)^{-2}dx$$

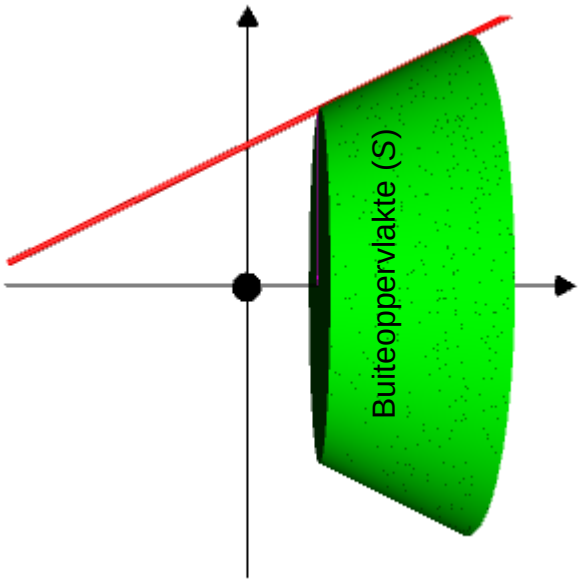
$$= 2\ln|x+3| + 3(x+3)^{-1} + c$$

IEB Copyright © 2023 

## VRAAG 12

Beskou die funksie $y = \frac{x}{2} + 4$.

(a) Dit word om die $x$-as geroteer van $x = 2$ tot $x = b$ en genereer 'n volume van $\frac{436\pi}{3}$ eenhede$^3$.




Bepaal die waarde van $b$ deur 'n integraal op te stel en te evalueer.

$$\pi\int_2^b \left(\frac{x}{2}+4\right)^2 dx = \frac{436\pi}{3}$$

$$\int_2^b \left(\frac{x}{2}+4\right)^2 dx = \frac{436}{3}$$

$$\int_2^b \frac{x^2}{4}+4x+16\,dx = \frac{436}{3}$$

$$\left[\frac{x^3}{12}+2x^2+16x\right]_2^b = \frac{436}{3}$$

$$\frac{b^3}{12}+2b^2+16b-\left(\frac{2^3}{12}+2(2^2)+16(2)\right) = \frac{436}{3}$$

$$\frac{b^3}{12}+2b^2+16b = \left(\frac{2^3}{12}+2(2^2)+16(2)\right)+\frac{436}{3}$$

$$\frac{b^3}{12}+2b^2+16b = 186$$

$$b^3+24b^2+192b-2\,232 = 0$$

$$b = 6$$

(b) Die buiteoppervlakte ($S$) wat gegenereer word deur die grafiek van $y$ van $x = a$ tot $x = b$ om die $x$-as te roteer, word gegee deur die formule:

$$S = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

Bepaal die buiteoppervlakte wanneer die funksie van $x = 2$ tot $x = 6$ om die $x$-as geroteer word.

$$S = 2\pi \int_2^6 \left(\frac{x}{2} + 4\right) \sqrt{1 + (\tfrac{1}{2})^2}\, dx$$

$$S = \sqrt{5}\pi \int_2^6 \left(\frac{x}{2} + 4\right) dx$$

$$S = 24\sqrt{5}\pi \text{ eenhede}^2$$

**Totaal: 200 punte**

EB Copyright © 2023