Plak asseblief die strepieskode-etiket hier

PUNTE-TOTAAL

INTERNASIONALE SEKONDÊRE SERTIFIKAAT-EKSAMEN
NOVEMBER 2024

VERDERE STUDIES WISKUNDE (UITGEBREID): VRAESTEL II

EKSAMENNOMMER

Tyd: 1 uur 100 punte

LEES ASSEBLIEF DIE VOLGENDE INSTRUKSIES NOUKEURIG DEUR

1. Hierdie vraestel bestaan uit 36 bladsye en 'n Inligtingsboekie van 4 bladsye (i–iv). Maak asseblief seker dat jou vraestel volledig is.
2. Hierdie vraestel bestaan uit DRIE modules. Kies **EEN** van die **DRIE** modules en merk (✓) die een wat jy gekies het:

   MODULE 2: STATISTIEK (100 punte) OF ☐
   MODULE 3: FINANSIES EN MODELLERING (100 punte) OF ☐
   MODULE 4: MATRIKSE EN GRAFIEKTEORIE (100 punte) ☐
3. **Beantwoord die vrae op die vraestel en handig dit in aan die einde van die eksamen. Onthou om jou eksamennommer neer te skryf in die spasie wat voorsien word.**
4. Nieprogrammeerbare en niegrafiese sakrekenaars mag gebruik word, tensy anders aangedui.
5. Al die nodige berekeninge moet duidelik getoon word en handskrif moet leesbaar wees.
6. Diagramme is nie op skaal geteken nie.
7. **Afronding van finale antwoorde.**
   MODULE 2: Vier desimale plekke, tensy anders aangedui.
   MODULE 3: Twee desimale plekke, tensy anders aangedui.
   MODULE 4: Twee desimale plekke, tensy anders aangedui.
8. Vier blanko bladsye (bladsy 33–36) word aan die einde van die vraestel ingesluit. Gebruik hierdie bladsye indien jy te min spasie vir 'n vraag het. Dui die nommer van jou antwoord duidelik aan indien jy hierdie ekstra spasie gebruik.

SLEGS VIR KANTOORGEBRUIK

Module 2	V1	V2	V3	V4	V5	**Totaal**
Punte	**16**	**16**	**31**	**23**	**14**	**100**

Module 3	V1	V2	V3	V4	V5	V6	**Totaal**
Punte	**20**	**17**	**13**	**14**	**25**	**11**	**100**

Module 4	V1	V2	V3	V4	V5	**Totaal**
Punte	**20**	**29**	**14**	**21**	**16**	**100**

IEB Copyright © 2024

MODULE 2 STATISTIEK

VRAAG 1

1.1 Moi pluk 'n mandjie pruime, maar net 80% van hulle is ryp. Die waarskynlikheid dat daar 'n wurm in 'n ryp pruim is, is p. Die waarskynlikheid dat daar 'n wurm in 'n groen pruim is, is 0,1.

(a) Voltooi 'n boomdiagram in terme van p.

(4)

(b) Bepaal die waarde van p indien daar wurms in presies die helfte van al die pruime is.

(3)

IEB Copyright © 2024

1.2 Die stogastiese veranderlike $X \sim B(n\,;\,p)$ kan benader word deur $Y \sim N(\mu\,;\,\sigma^2)$ wanneer daar aan sekere voorwaardes voldoen word.

(a) Verduidelik waarom 'n kontinuïteitskorreksie toegepas moet word wanneer die normaalbenadering vir 'n binomiaalverdeling gebruik word.

(2)

(b) Vir elkeen van die volgende binomiale stogastiese veranderlikes, X:

- Dui met redes aan of X deur 'n normaalverdeling benader kan word.
- Indien wel, skryf die normaalbenadering van X in die vorm $N(\mu\,;\,\sigma^2)$ neer.

(1) $X \sim B(70\,;\,0{,}04)$

(2) $X \sim B(70\,;0{,}4)$

(7)
[16]

VRAAG 2

2.1 Mnr. Crosse stel baie belang in tuinvoëls, veral die gewone fret. Die gemiddelde lengte van hierdie voëls is μ cm. Hy neem 'n ewekansige steekproef van 40 van hierdie voëls en bepaal dat 'n 90%-vertrouensinterval vir μ 8,3 cm tot 9,9 cm is.



(a) Bereken die steekproefgemiddelde en die standaardafwyking korrek tot twee desimale plekke.

(6)

(b) Mnr. Crosse neem 100 steekproewe en bereken 'n 95%-vertrouensinterval vir elkeen. Ongeveer hoeveel van hierdie vertrouensintervalle sal nie die populasiegemiddelde bevat nie?

(2)

IEB Copyright © 2024

2.2 'n Farmaseutiese maatskappy beweer dat 'n sekere hoofpynpil minder as 300 mg aspirien bevat. Toetse wat op 120 tablette uitgevoer is, het 'n steekproefgemiddelde van 298 mg met 'n standaardafwyking van σ mg tot gevolg gehad.

(a) Gee die nul- en alternatiewe hipotese.

(2)

(b) Indien die farmaseutiese maatskappy se bewering by die 1%-betekenispeil verwerp is, bepaal die grootste moontlike waarde van σ korrek tot een desimale plek.

(6)
[16]

IEB Copyright © 2024

VRAAG 3

'n Bepaalde model digitale kamera het 'n lewensduur wat normaal verdeel is met 'n gemiddelde van 6,5 jaar en 'n standaardafwyking van 1,15 jaar.

(a) 'n Klant koop hierdie model kamera. Toon, met alle berekeninge, dat die waarskynlikheid dat die kamera langer as 5 jaar sal hou ongeveer 90% is.

(6)

(b) 5% van hierdie kameras hou minder as t jaar. Bereken die waarde van t korrek tot die naaste maand.

(6)

IEB Copyright © 2024

Die vervaardiger bied 'n vyfjaarwaarborg vir hierdie model kamera aan. Die waarskynlikheid van 'n eis teen die waarborg bly 10%.

Tien digitale kameras van hierdie model word op 'n sekere dag verkoop.

(c) Bepaal die waarskynlikheid dat hoogstens een van hulle teen die waarborg geëis sal word.

(8)

(d) Bepaal die waarskynlikheid dat die tiende kamera wat verkoop word die tweede een sal wees om teen die waarborg geëis te word.

(5)

IEB Copyright © 2024

Die maatskappy se beleid is sodanig dat kameras wat binne 3 jaar 'n fout ontwikkel met 'n nuwe kamera vervang sal word.

(e) Indien 'n kamera teen die waarborg geëis word, bepaal die waarskynlikheid dat dit met 'n nuwe een vervang sal word.

(6)
[31]

IEB Copyright © 2024

VRAAG 4

4.1 Die diskrete stogastiese veranderlike X het die waarskynlikheidsverdeling wat in die volgende tabel getoon word:

x	0	1	2	3	4
$P(X=x)$	p	p	0,2	0,1	q

Gegee: $E[X]=2,45$.

(a) Bepaal die waardes van p en q.

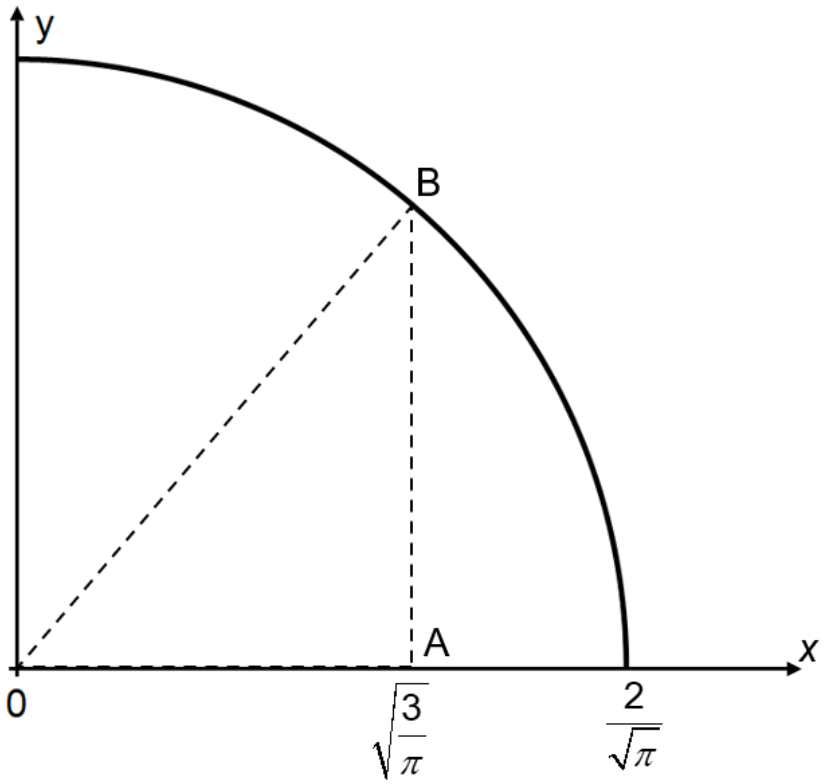
(6)

(b) Bepaal $P(X<E[X])$.

(3)

4.2 'n Stogastiese veranderlike X het waarskynlikheiddigtheidsfunksie f,

- waar die grafiek van $y = f(x)$ 'n kwartsirkel met middelpunt (0;0) en radius $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$, $x \geq 0$ en $y \geq 0$, is.
- Elders is $f(x) = 0$.



(a) Verifieer dat $f(x)$ 'n waarskynlikheiddigtheidsfunksie is.

(4)

IEB Copyright © 2024

A en B is die punte waar die lyn $X = \sqrt{\frac{3}{\pi}}$ die *x*-as en die kwartsirkel onderskeidelik ontmoet.

(b) Toon dat $A\hat{O}B = \frac{\pi}{6}$ *radiale*.

(4)

(c) Bepaal vervolgens $\text{P}\left(X < \sqrt{\frac{3}{\pi}} \right)$.

(6)
[23]

VRAAG 5

5.1 'n Groep van 12 mense bestaan uit:

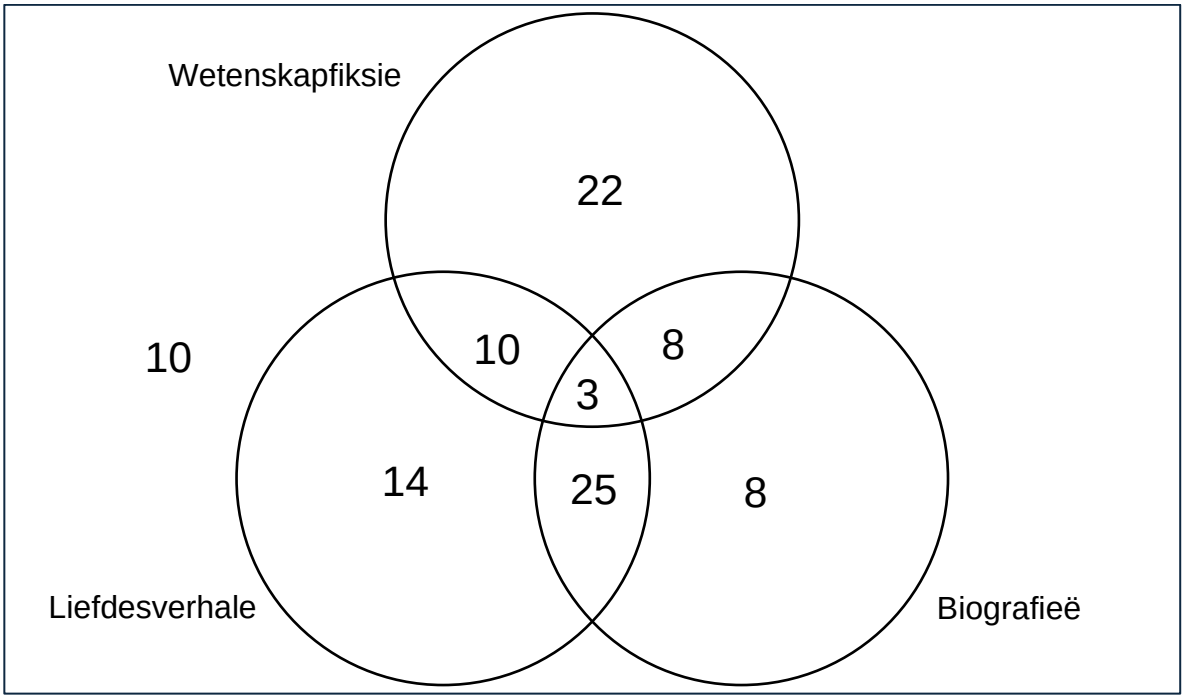
- 3 seuns
- 4 meisies
- 5 volwassenes

Bepaal die waarskynlikheid dat 'n lukraak gekose span van 5 mense uit die groep presies een volwassene en minstens 1 meisie en 1 seun sal bevat.

(7)

IEB Copyright © 2024

5.2 Die Venn-diagram toon die getal leerders in 'n graadgroep van 100 leerders wat verskillende tipes boeke lees.



'n Leerder word lukraak uit die 100 leerders gekies. Dan word nog 'n leerder uit die oorblywende leerders gekies.

Bepaal die waarskynlikheid dat die eerste leerder biografieë lees en die tweede leerder liefdesverhale lees, maar nie wetenskapfiksie nie.

(7)
[14]

Totaal vir Module 2: 100 punte

IEB Copyright © 2024

MODULE 3 FINANSIES EN MODELLERING

VRAAG 1

Shailen verkry nou 'n lening van R15 000 en 6 jaar van nou af 'n verdere Rx. Die lening moet terugbetaal word deur middel van halfjaarlikse paaiemente van Ry wat oor 6 maande begin en oor 10 jaar eindig.

(a) Bereken x indien y = 3 500 en die rentekoers konstant bly op 10% per jaar, halfjaarliks saamgestel.

(8)

(b) Bereken y indien x = R10 000 en die rente vir die eerste 6 jaar 10% per jaar, halfjaarliks saamgestel, is en 12% per jaar, halfjaarliks saamgestel, vir die oorblywende 4 jaar.

(12)
[20]

IEB Copyright © 2024

VRAAG 2

'n Lening word verkry en moet terugbetaal word deur middel van 120 maandelikse paaiemente wat na een maand begin met rente wat bereken word teen 12% per jaar, maandeliks saamgestel. Die totale rente wat oor die termyn van die lening betaal word, is R1 443 302,76.

(a) Bereken die maandelikse paaiement en toon dat die leningsbedrag R2 000 000 is.

(10)

(b) Bereken die rente wat in die 81ste maand betaal word.

(7)
[17]

VRAAG 3

'n Spaarskema, waar rente maandeliks bereken word, word deur die volgende rekursie-vergelyking voorgestel:

$$F_{n+1} = aF_n + 1\,200\,(1{,}08)^n; \quad F_0 = b$$

(a) Na 1 maand is die saldo R3 230 en na 2 maande is dit R4 574,45.
Bereken *a* en *b*.

(9)

(b) Bepaal die effektiewe jaarlikse rentekoers.

(4)
[13]

IEB Copyright © 2024

VRAAG 4

'n Populasie, P_n, groei logisties binne 'n omgewing met 'n vaste dravermoë K. By die punt waar die populasie teen sy vinnigste tempo groei, is P_n = 6 000.

Verder, wanneer P = 10 000, dan is $\frac{\Delta P}{P} = 0{,}03$.

(a) Skets die grafiek van $\frac{\Delta P}{P}$ teen P en dui minstens twee punte op die grafiek aan.

(3)

(b) Bewys dat: $P_{n+1} = 1{,}18P_n - 0{,}000015P_n^2$

(9)

(c) Bepaal $\frac{\Delta P}{P}$ wanneer die groeikoers op sy hoogste is.

(2)
[14]

IEB Copyright © 2024

VRAAG 5

Daar is 'n fassinerende verwantskap tussen die witdoodshaai en die Kaapse pelsrob in die waters rondom Robbeiland naby die kus van Kaapstad. Die haaie gebruik 'n jagtegniek wat 'n sprong uit die water behels, waar hulle hulle vertikaal uit die water lanseer om robbe te vang wat naby die oppervlak swem.





Witdoodshaaie, waarvan 30% vermoedelik voortplant, het tipies 'n klein werpsel elke twee jaar. Die witdoodshaai het 'n lang leeftyd, maar dit kan as 12 jaar geneem word in terme van hul interaksie met die eiland. Daar is tans 6 gereelde roofdiere rondom die eiland. Elke haai kan tot 45 robkleintjies per jaar vreet.



Vroulike Kaapse pelsrobbe produseer tipies 'n enkele kleintjie elke nege maande met 'n sterftekoers van 15% vir die kleintjies. Neem aan dat 'n kwart van die robpopulasie voortplant en dat daar tans ongeveer 1 500 robbe is in die waters om die eiland met 'n vermoë van 1 650. Met die voorkoms van haaie word die ewewig van robbe as 228 voorspel. Beskou 'n jaarlikse siklus.

(a) Bereken die intrinsieke groeikoers van die robbe tot 4 desimale plekke.

(6)

(b) Bepaal die koers van suksesvolle aanvalle deur die haaie op die robbe.

(5)

IEB Copyright © 2024

(c) Bereken 'n beraming van die werpselgrootte van die witdoodshaai.

(8)

(d) Bepaal die ewewigsgetal haaie.

(6)
[25]

IEB Copyright © 2024

VRAAG 6

Twee gelyktydige rekursievergelykings word soos volg gegee:

$$y_{n+1} = \frac{3y_n}{5\,000}\left(1250 + x_n\right) \qquad y_0 = 100$$

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{1000}\left(1500 - x_n - 20y_n\right) \qquad x_0 = 10$$

(a) Bereken $(x_1; y_1)$

(3)

(b) Bepaal die ewewigswaardes van x en y.

(8)
[11]

Totaal vir Module 3: 100 punte

IEB Copyright © 2024

MODULE 4 MATRIKSE EN GRAFIEKTEORIE

VRAAG 1

1.1 Gee die aard van die transformasie of transformasies wat voortgebring word wanneer daar met die volgende matrikse vermenigvuldig word:

(a) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(2)

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$

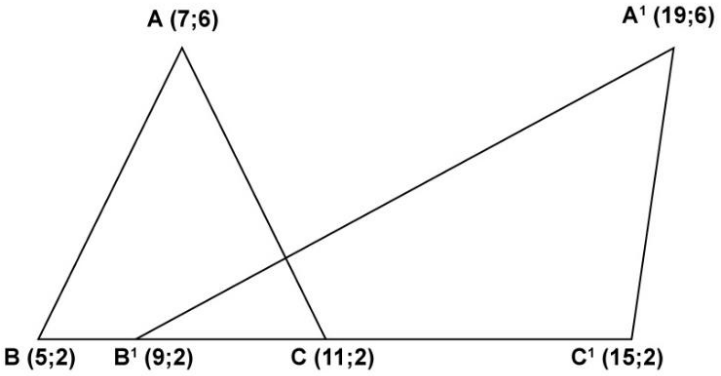
(3)

(c) $\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

(4)

IEB Copyright © 2024

1.2 Gegee:



(a) Bepaal die transformasiematriks wat ABC op $A^1B^1C^1$ afbeeld.

(7)

(b) Noem die transformasie.

(2)

(c) Bepaal die verhouding:

$$\frac{Oppervlakte(ABC)}{Oppervlakte(A^1B^1C^1)}$$

(2)
[20]

VRAAG 2

2.1 (a) 'n Matriks moet 'n _____ matriks wees vir die determinant om te bestaan. (1)

(b) Die inverse van 'n matriks bestaan slegs indien die determinant

_____ is. (2)

2.2 Bepaal die waarde van x indien

$$M=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 4\end{pmatrix};\ P=\begin{pmatrix}2 & x\\ 3 & 1\end{pmatrix};\ Q=\begin{pmatrix}3x+2 & 7\\ 7-x & 7\end{pmatrix}$$

en $M^T \times P^T = Q$.

(6)

IEB Copyright © 2024

2.3 'n Stel vergelykings word gegee:

$2x - 5y + 3z = 8$

$3x - y + 4z = 7$

$x + 3y + 2z = -3$

Die ryreduksie van die geassosieerde aangevulde matriks is hieronder begin.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -5 & 3 & 8 \\ 3 & -1 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 2 & -3 \end{array}\right] 2R_2 - 3R_1$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -5 & 3 & 8 \\ 0 & 13 & -1 & -10 \\ 1 & 3 & 2 & -3 \end{array}\right]$$

Sit die ryreduksie voort om vir x, y en z op te los.

(7)

IEB Copyright © 2024

2.4 Indien $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$, bepaal:

(a) die determinant van A.

(4)

(b) die matriks van kofaktore van A.

(5)

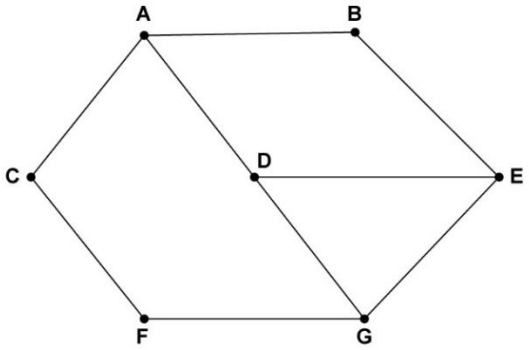
(c) die inverse van A.

(4)
[29]

IEB Copyright © 2024

VRAAG 3

3.1 Verduidelik duidelik wat jy sal moet doen om 'n Euler-kring in die grafiek hieronder te skep.



(3)

3.2 Gegee: P =

	A	B	C	D	E
A	0	1	1	0	1
B	1	0	0	0	0
C	1	0	0	1	1
D	0	0	1	0	1
E	1	0	1	1	0

Teken die grafiek wat met matriks P geassosieer word.

(5)

IEB Copyright © 2024

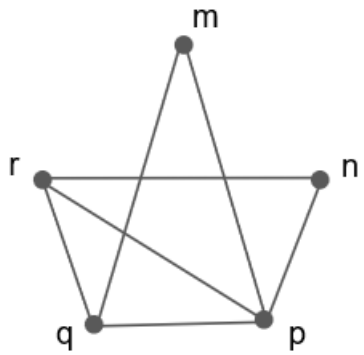
3.3 Twee enkelvoudige, samehangende grafieke word gegee.

Grafiek (i)

Versameling nodusse = {a; b; c; d; e}

Versameling skakels = {(a, b); (a, c); (a, e); (b, c); (b, d); (b, e); (c, d); (d, e)}

Grafiek (ii)



(a) Gee 'n rede waarom Grafiek (i) nie isomorf is aan Grafiek (ii) nie.

(2)

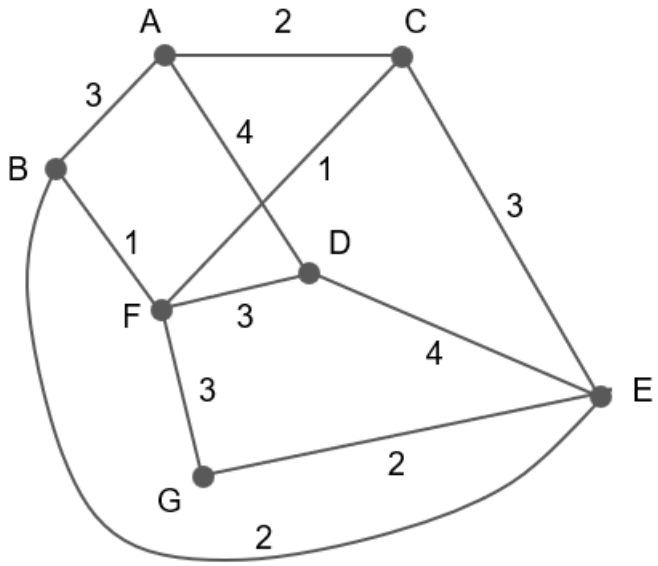
(b) Noem een skakel wat uit een van die grafieke verwyder kan word om die twee grafieke isomorf te maak.

(4)
[14]

IEB Copyright © 2024

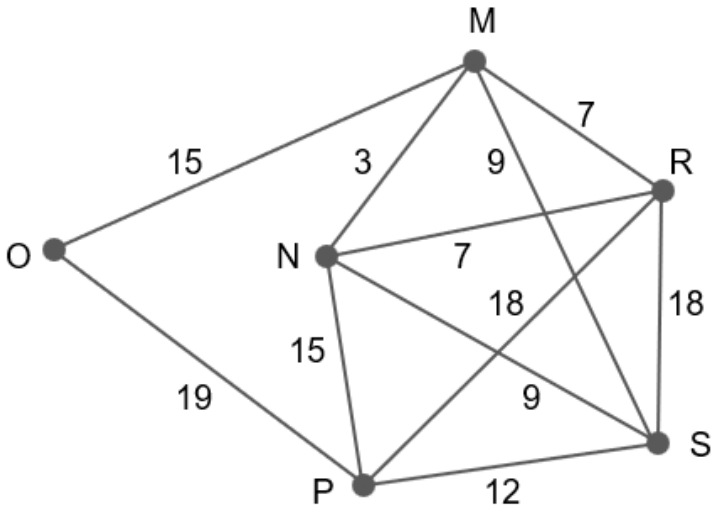
VRAAG 4

4.1 Gebruik Prim se algoritme om die minimum spanboom vir die grafiek te bepaal deur by nodus A te begin. Noem die volgorde waarin jy die skakels kies sowel as die totale lengte van die spanboom duidelik.



(8)

4.2 (a) 'n Afleweringsroete, wat by O begin en eindig, moet die vyf plekke gemerk M, N, P, R en S besoek. Gebruik die naastebure-algoritme om die bogrens vir die afleweringsroete te bepaal. Toon die volgorde van die besoekte nodusse duidelik.



(8)

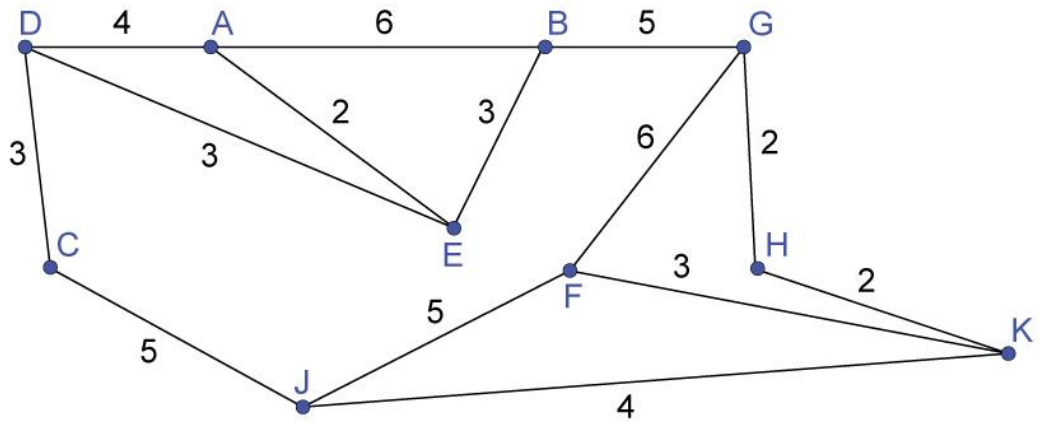
(b) Bepaal een afleweringsroete, wat by O begin en eindig, wat korter is as die bogrens.

(5)
[21]

IEB Copyright © 2024

VRAAG 5

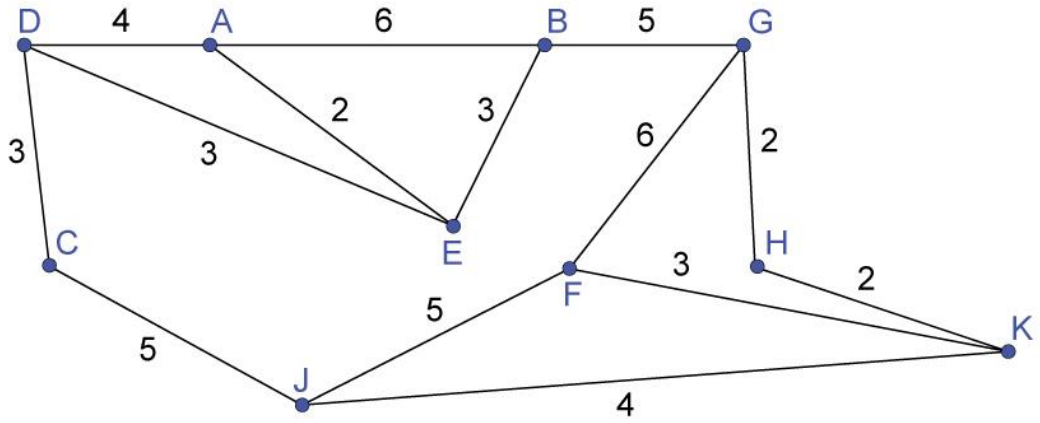
'n Huis word tot 'n hotel opgeknap. Die skakels verteenwoordig die afstand tussen kamers in meter. Die kamers word deur die nodusse verteenwoordig.



(a) Gebruik Dijkstra se algoritme om die kortste pad van A na K te bepaal. Lewer duidelik bewys van jou berekeninge, waaronder die beëindiging van nielewensvatbare roetes. Maak seker dat jy jou finale roete sowel as die lengte daarvan noem.

(8)

IEB Copyright © 2024



(b) 'n Deur wat gesluit is, blokkeer CJ.
Bepaal met behulp van jou antwoord op Vraag 5 (a) die kortste roete van A na J.

(3)

(c) 'n Verandering aan die hotel verbind B met F sodanig dat die driehoekongelykheid geld. Die verandering beteken dat AEBFK nou die kortste roete van A na K is.

Bepaal die moontlike lengte(s) van BF.

(5)
[16]

Totaal vir Module 4: 100 punte

IEB Copyright © 2024

BYKOMENDE SPASIE (ALLE VRAE)

ONTHOU OM DUIDELIK BY DIE VRAAG AAN TE DUI DAT JY DIE BYKOMENDE SPASIE GEBRUIK HET OM TE VERSEKER ALLE ANTWOORDE WORD NAGESIEN.

IEB Copyright © 2024

IEB Copyright © 2024

IEB Copyright © 2024

IEB Copyright © 2024