INTERNASIONALE SEKONDÊRE SERTIFIKAAT-EKSAMEN
NOVEMBER 2024

VERDERE STUDIES WISKUNDE (STANDAARD): VRAESTEL I

NASIENRIGLYNE

Tyd: 2 uur 200 punte

Hierdie nasienriglyne is opgestel vir gebruik deur eksaminators en hulpeksaminators van wie verwag word om almal 'n standaardiseringsvergadering by te woon om te verseker dat die riglyne konsekwent vertolk en toegepas word by die nasien van kandidate se skrifte.

Die IEB sal geen bespreking of korrespondensie oor enige nasienriglyne voer nie. Ons erken dat daar verskillende standpunte oor sommige aangeleenthede van beklemtoning of detail in die riglyne kan wees. Ons erken ook dat daar sonder die voordeel van die bywoning van 'n standaardiseringsvergadering verskillende vertolkings van die toepassing van die nasienriglyne kan wees.

IEB Copyright © 2024

VRAAG 1

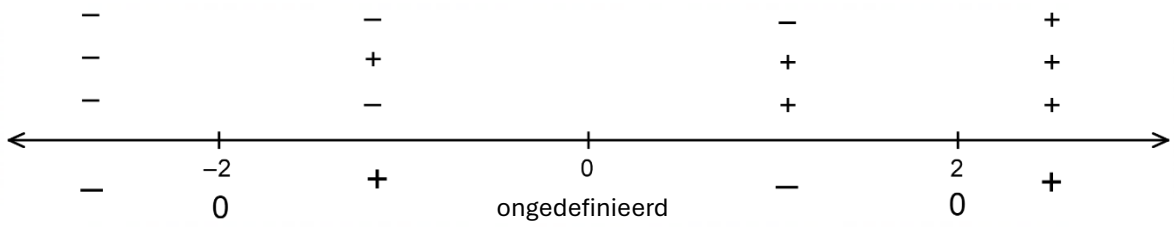
1.1 Los op vir $x \in \mathbb{R}$:

(a) $x \leq \frac{4}{x}$

$x - \frac{4}{x} \leq 0$

$\frac{x^2 - 4}{x} \leq 0$

$\frac{(x-2)(x+2)}{x} \leq 0$



$x \leq -2$ of $0 < x \leq 2$

(b) $\ln(fe^x + c) = k$

$e^k = fe^x + c$

$e^k - c = fe^x$

$\frac{e^k - c}{f} = e^x$

$x = \ln\left(\frac{e^k - c}{f}\right)$

1.2 Los op vir $x \in \mathbb{R}$.

$\left|x^2 + 6x\right| = 8$

$x^2 + 6x = 8$ of $x^2 + 6x = -8$

$x^2 + 6x - 8 = 0$ of $x^2 + 6x + 8 = 0$

$x = \frac{-6 \pm \sqrt{68}}{2}$ of $(x+2)(x+4) = 0$

$x = -3 \pm \sqrt{17}$ of $x = -2$ of $x = -4$

IEB Copyright © 2024

1.3 Een van die faktore van $f(x) = 2x^5 + 5x^4 + 13x^3 + 15x^2 - 2x - 3$ is $(2x + 3)$. Bepaal die ooreenstemmende faktor.

Metode 1 – deur inspeksie:

$$2x^5 + 5x^4 + 13x^3 + 15x^2 - 2x - 3$$
$$= (2x + 3)(x^4 + x^3 + 5x^2 - 1)$$

Metode 2 – deur langdeling:

$$\begin{array}{r} x^4 + x^3 + 5x^2 - 1 \\ 2x + 3 \overline{)\, 2x^5 + 5x^4 + 13x^3 + 15x^2 - 2x - 3} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \underline{2x^5 + 3x^4} \\ 2x^4 + 13x^3 \\ \underline{2x^4 + 3x^3} \\ 10x^3 + 15x^2 \\ \underline{10x^3 + 15x^2} \\ 0 \quad -2x - 3 \\ \underline{-2x - 3} \\ 0 \end{array}$$

1.4 Bepaal reële waardes van *a* en *b* indien:

$$(a + bi)(4 - i) = a + 3bi + 3b + i$$

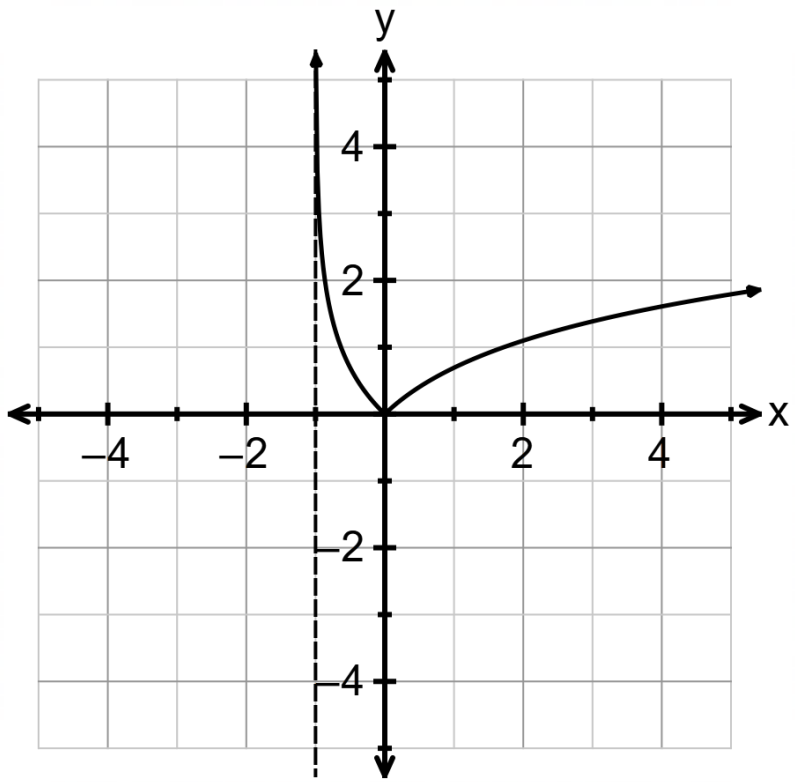
$$4a - ai + 4bi - bi^2 = (a + 3b) + (3b + 1)i$$
$$(4a + b) + (4b - a)i = (a + 3b) + (3b + 1)i$$
$$\therefore 4a + b = a + 3b \ \text{①} \text{ en } \text{②} \ 4b - a = 3b + 1$$
uit ② $a = b - 1$

Vervanging in ① gee:
$$4(b - 1) + b = b - 1 + 3b$$
$$5b - 4 = 4b - 1$$
$$b = 3 \text{ en } a = 2$$

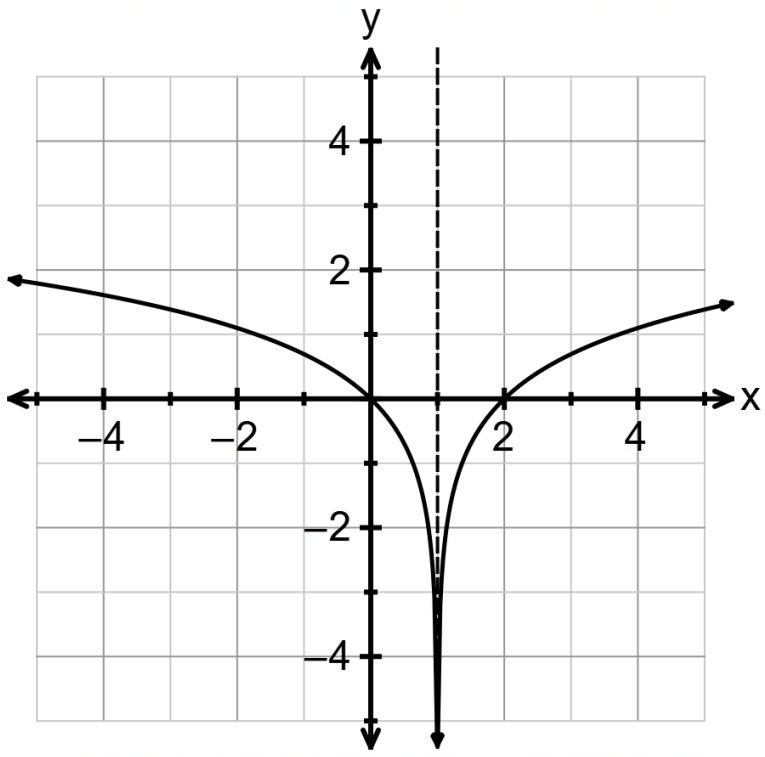
IEB Copyright © 2024

1.5 Skets die volgende funksies op die asse wat voorsien word. Dui ook die vergelykings van enige asimptote aan en toon enige afsnitte met die asse.

(a) $y = \left|\ln(x+1)\right|$



(b) $y = \ln\left|x-1\right|$



VRAAG 2

Gebruik volledige induksie om te bewys dat:

$6^n - 1$ deelbaar is deur 5 vir alle $n \in \mathbb{N}$

Indien $n = 1$, het ons $6^1 - 1 = 5$ wat deelbaar is deur 5
Dus is dit waar vir $n = 1$

Neen nou aan waar vir $n = k$

$6^k - 1 = 5p$ waar $p \in \mathbb{N}$ (*)

Beskou nou $n = k + 1$

$6^{k+1} - 1$
$= 6(6^k) - 1$ ①

Uit (*) weet ons dat $6^k = 5p + 1$

Vervanging in ① gee:
$6(5p + 1) - 1$
$= 30p + 5$
$= 5(6p + 1)$

Dus is dit waar vir $n = k + 1$

Deur die beginsel van volledige induksie
is $6^n - 1$ dus deelbaar deur 5 vir $n \in \mathbb{N}$.

IEB Copyright © 2024

VRAAG 3

Indien $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$, bepaal $f'(x)$ uit eerste beginsels.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{x+h}}\right)-\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{h}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{x+h}}-\frac{\sqrt{x+h}}{\sqrt{x}\sqrt{x+h}}}{h}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+h}}{\sqrt{x}\sqrt{x+h}}}{h}\times\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+h}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+h}}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{-h}{\left(\sqrt{x}\sqrt{x+h}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+h}\right)}}{h}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{\left(\sqrt{x}\sqrt{x+h}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+h}\right)}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{x\sqrt{x+h}+(x+h)\left(\sqrt{x}\right)}$$

$$f'(x)=\frac{-1}{2x\sqrt{x}}\quad\text{of}\quad-\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}$$

VRAAG 4

4.1 Bepaal, met klassifikasie, alle asimptote van die volgende rasionale funksies. Jy moet die waarde(s) van x gee waar enige verwyderbare diskontinuïteite bestaan.

(a) $y = \dfrac{2x^2 + 6}{x^2 - 4}$

$$y = \frac{2x^2 + 6}{(x-2)(x+2)}$$

horisontale asimptoot: $y = 2$
vertikale asimptote: $x = 2$ en $x = -2$

(b) $y = \dfrac{x^2 + 4x + 3}{2x + 1}$

$$x^2 + 4x + 3 = (2x+1)\left(\frac{1}{2}x + \frac{7}{4}\right) + \frac{5}{4}$$

$$\therefore \frac{x^2 + 4x + 3}{2x + 1} = \frac{1}{2}x + \frac{7}{4} + \frac{5}{4(2x+1)}$$

$\therefore y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{7}{4}$ is 'n skuins asimptoot
$x = -\dfrac{1}{2}$ is 'n vertikale asimptoot

(c) $y = \dfrac{x^2 - 6x + 8}{x^3 - 2x^2 - 8x}$

$$y = \frac{(x-4)(x-2)}{x(x^2 - 2x - 8)}$$

$$y = \frac{(x-4)(x-2)}{x(x-4)(x+2)}$$

horisontale asimptoot: $y = 0$
vertikale asimptote: $x = -2$ en $x = 0$
verwyderbare diskontinuïteit: $x = 4$

IEB Copyright © 2024

4.2 Beskou die funksie $f(x)=\dfrac{x^2+2x-5}{2x-3}$.

(a) Bepaal die koördinate van sy stasionêre punte.

$$f(x)=\frac{x^2+2x-5}{2x-3}$$

$$f'(x)=\frac{(2x+2)(2x-3)-2(x^2+2x-5)}{(2x-3)^2}=0$$

$$4x^2-2x-6-2x^2-4x+10=0$$

$$2x^2-6x+4=0$$

$$x^2-3x+2=0$$

$$(x-2)(x-1)=0$$

$x=2$ of 1
(2 ; 3) en (1 ; 2) is die stasionêre punte

(b) Gebruik die feit dat $f''(x)=\dfrac{4x-6}{(2x-3)^4}$ om die aard van die stasionêre punte wat jy in Vraag 4.2 (a) bepaal het, te regverdig.

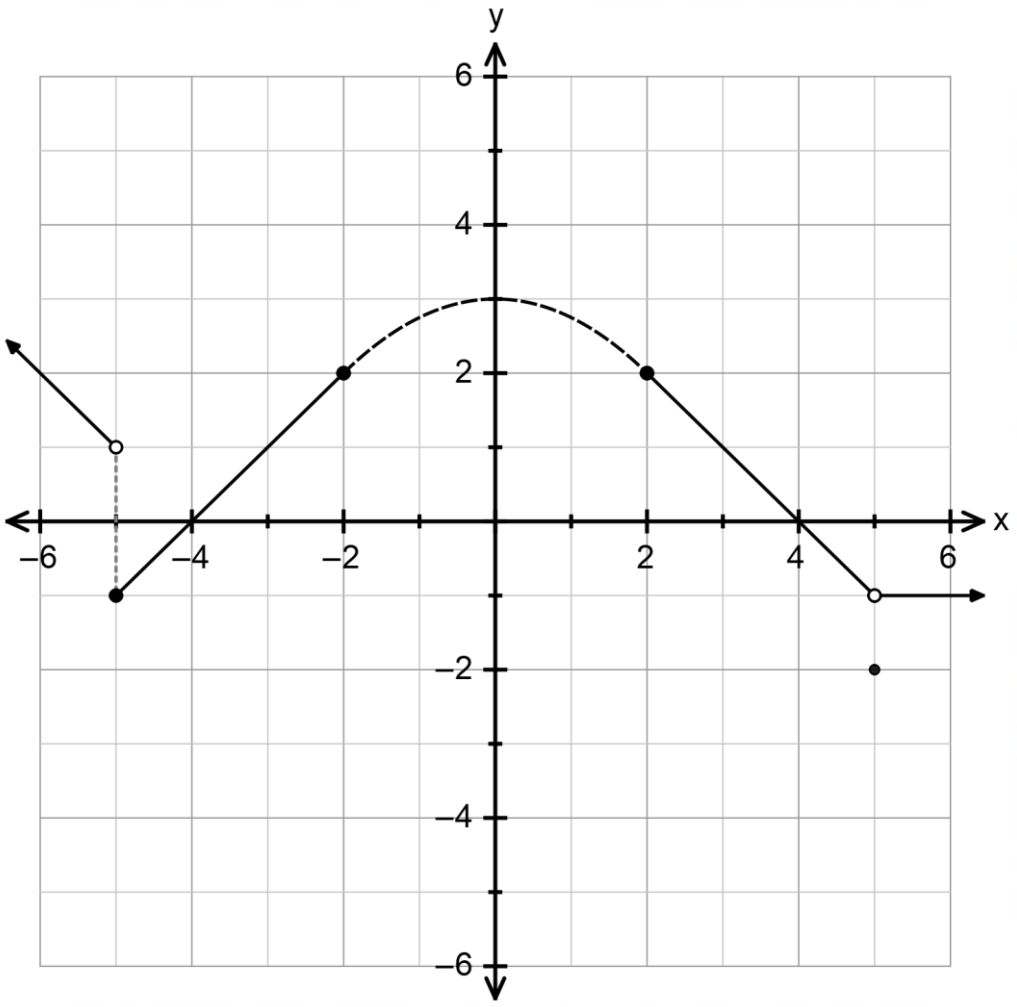
$f''(1)<0$ dus is (1 ; 2) 'n lokale maksimum

$f''(2)>0$ dus is (2 ; 3) 'n lokale minimum

IEB Copyright © 2024

VRAAG 5

Beskou die funksie *f* wat hieronder getoon word:



(a) Skryf 'n wiskundige bewering om te regverdig waarom *f* diskontinu is by:

(1) $x = -5$

$\lim\limits_{x \to -5} f(x)$ bestaan nie aangesien $\lim\limits_{x \to -5^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to -5^+} f(x)$

(2) $x = 5$

$\lim\limits_{x \to 5} f(x) \neq f(5)$

(b) Klassifiseer die diskontinuïteit wat bestaan by:

(1) $x = -5$

nieverwyderbaar **OF** sprong

(2) $x = 5$

verwyderbaar

IEB Copyright © 2024

(c) Veronderstel $g(x) = \begin{cases} f(x) & -4 \le x < -2 \\ ax^2 + bx + c & -2 \le x < 2 \\ f(x) & 2 \le x \le 4 \end{cases}$

Bepaal *a, b* en *c* indien $g(x)$ differensieerbaar is by elke punt op die interval $[-4\,;\,4]$.

Dit moet simmetries wees om die *y*-as

dus sal dit van die vorm $g(x) = ax^2 + p$ wees

Vir kontinuïteit weet ons dat $g(2) = g(-2) = 2$

dus $4a + p = 2$ ①

Vir differensieerbaarheid weet ons dat

$\lim\limits_{x \to 2} f'(x) = -1$

dus $\lim\limits_{x \to 2} (2ax) = -1$

$\therefore 4a = -1$

$\therefore a = -\frac{1}{4}$ en $p = 3$

$\therefore g(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 3$ vir $x \in [-2\,;\,2)$

IEB Copyright © 2024

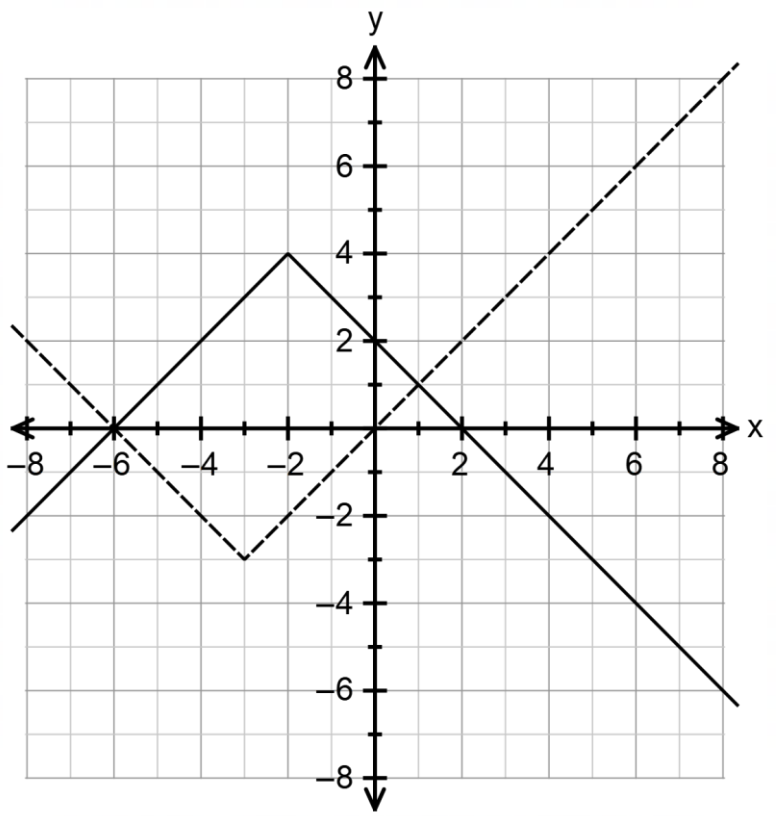
VRAAG 6

6.1 Die funksie $y = -|x+2|+4$ is hieronder geteken.

Teken nog 'n funksie wat jou in staat sal stel om

$|x+2| \geq -|x+3|+7$ grafies op te los.

Gee vervolgens, of andersins, die oplossing vir die ongelykheid.



$|x+2| \geq -|x+3|+7$

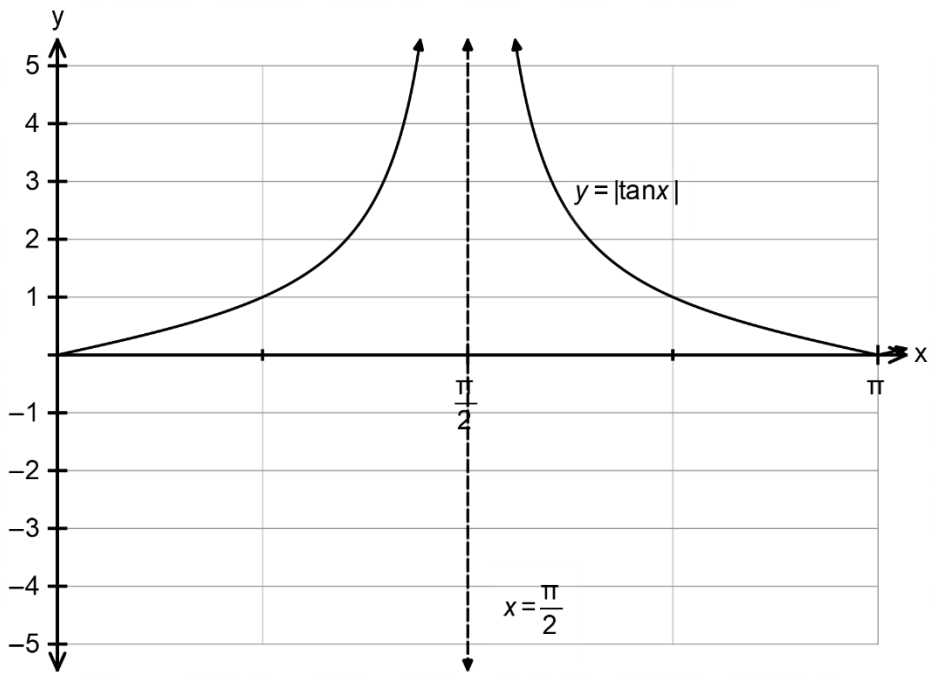
$-|x+2| \leq |x+3|-7$

$-|x+2|+4 \leq |x+3|-3$

Dus moet ons $y = |x+3|-3$ teken (sien hierbo)
Oplossing is $x \leq -6$

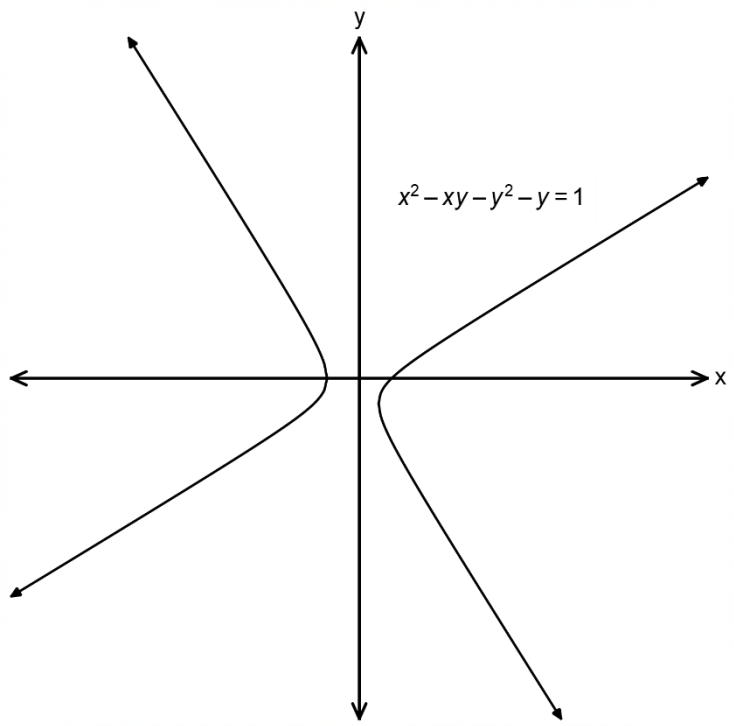
6.2 Teken die grafiek van $y = \left| \tan x \right|$ op die asse wat voorsien word en toon alle punte van belang.

Jy moet ook enige asimptote met hul vergelykings teken en benoem.



VRAAG 7

'n Gedeelte van die grafiek van die implisiet gedefinieerde verwantskap $x^2 - xy - y^2 - y = 1$ word hieronder getoon.



(a) Bepaal die koördinate van die positiewe *x*-afsnit.

Laat $y = 0$

$x^2 = 1$

$x = \pm 1$

dus (1 ; 0)

(b) Bepaal die vergelyking van die raaklyn aan die kromme by die punt wat in Vraag 7 (a) bepaal is.

Implisiete differensiasie gee:

$$2x - y - x\frac{dy}{dx} - 2y\frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx}(-x - 2y - 1) = y - 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - 2x}{-x - 2y - 1}$$

Vervang (1 ; 0)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$0 = 1(1) + c$$

$$y = x - 1$$

VRAAG 8

(a) Jy het geleer hoe om e^x en ln x te differensieer, maar wat van die differensiasie van eksponensiële en logaritmiese funksies van ander grondtalle?

Gegee: $a^x = e^{\ln a^x} = e^{x\ln a}$ en $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$

Bepaal vervolgens:

$$\frac{d}{dx}(2^x + \log_3 x)$$
$$= \frac{d}{dx}\left(e^{x\ln 2} + \frac{\ln x}{\ln 3}\right)$$
$$= e^{x\ln 2}\ln 2 + \frac{1}{x\ln 3} \quad \textbf{OF} \quad 2^x \ln 2 + \frac{1}{x\ln 3}$$

(b) Los $\cos^2\left(\theta - \dfrac{\pi}{6}\right) - \sin^2\left(\theta - \dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{2}$ op vir $\theta \in [0\,;\,2\pi]$.

$$\cos\left(2\theta - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

sleutel $\angle = \dfrac{\pi}{3}$ in kwadrant 2 en 3

$2\theta - \dfrac{\pi}{3} = \pi - \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k$ of $2\theta - \dfrac{\pi}{3} = \pi + \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k$ beide met $k \in \mathbb{Z}$

$2\theta = \pi + 2\pi k$ of $2\theta = \dfrac{5\pi}{3} + 2\pi k$

$\theta = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$ of $\theta = \dfrac{5\pi}{6} + \pi k$

$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ of $\dfrac{3\pi}{2}$ of $\dfrac{5\pi}{6}$ of $\dfrac{11\pi}{6}$

IEB Copyright © 2024

VRAAG 9

Bepaal die volgende integrale:

(a) $\int x\sec^2(5x^2)\,dx$

Metode 1 – deur inspeksie

$\int x\sec^2(5x^2)\,dx$

$= \frac{\tan(5x^2)}{10} + c$

Metode 2 – deur vervanging

$\int x\sec^2(5x^2)\,dx$

Laat $u = 5x^2$ dan $\frac{du}{dx} = 10x$ en $dx = \frac{du}{10x}$

$= \frac{1}{10}\int \sec^2 u\,du$

$= \frac{1}{10}\tan u + c$

$= \frac{1}{10}\tan(5x^2) + c$

ALTERNATIEWE MEMO VIR DIÉ WAT DIE VERKEERDE FORMULE GEBRUIK SOOS VOORSIEN IN DIE INLIGTINGSBOEKIE

Metode 1 – deur inspeksie

$\int x\sec^2(5x)\,dx$

$= \frac{\cot(5x^2)}{10} + c$

IEB Copyright © 2024

Metode 2 – deur vervanging

$$\int x\sec^2(5x)\ dx$$

let $u = 5x^2$ then $\frac{du}{dx} = 10x$ and $dx = \frac{du}{10x}$

$$= \frac{1}{10}\int \sec^2 u \text{ du}$$

$$= \frac{1}{10}\cot u + c$$

$$= \frac{1}{10}\cot(5x^2) + c$$

(b) $\int 3 + \cot^2 x\ dx$

$$= \int 2 + 1 + \cot^2 x\ dx$$

$$= \int 2 + \text{cosec}^2 x\ dx$$

$$= 2x - \cot x + c$$

(c) $\int \frac{x^3+4}{x^2-4}\,dx$

$x^3+4=(x^2-4)x+4x+4$

$\frac{x^3+4}{x^2-4}=x+\frac{4x+4}{(x-2)(x+2)}$

nou $\frac{4x+4}{(x-2)(x+2)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}$

oordekkingsmetode gee A = 3 en B =1

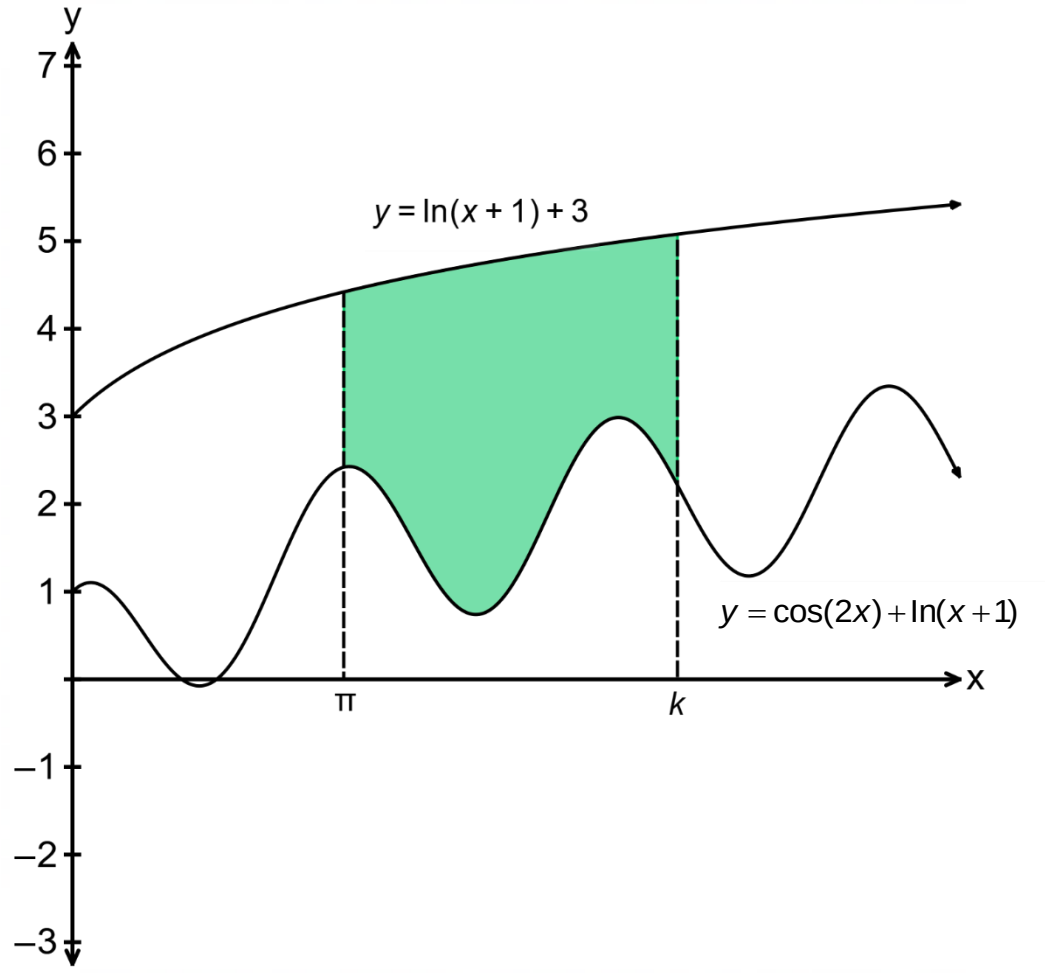
$\therefore \int \frac{x^3+4}{x^2-4}\,dx=\int x+\frac{3}{x-2}+\frac{1}{x+2}\,dx$

$=\frac{x^2}{2}+3\ln|x-2|+\ln|x+2|+c$

IEB Copyright © 2024

VRAAG 10

(a) Bepaal die gearseerde oppervlakte in terme van k en toon alle berekening-besonderhede. Jy moet enige integrale in jou antwoord evalueer.



$$A = \int_{\pi}^{k} \ln(x+1) + 3 - (\cos(2x) + \ln(x+1))\ dx$$

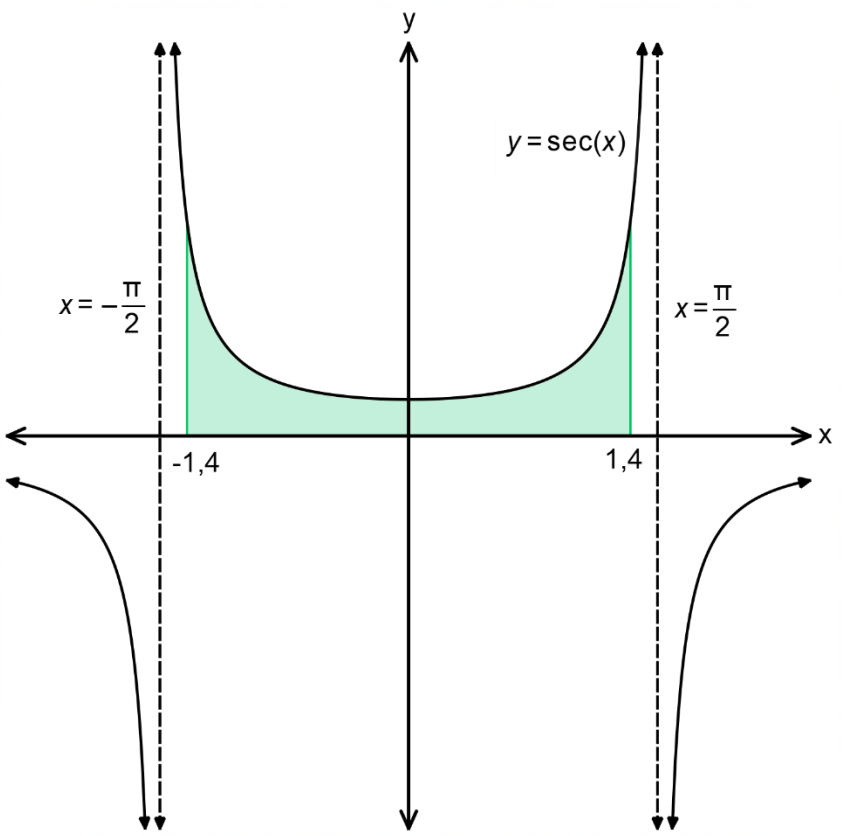
$$A = \int_{\pi}^{k} 3 - \cos(2x)\ dx$$

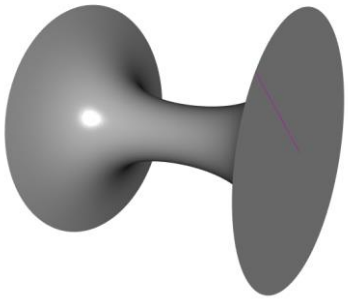
$$A = \left[3x - \frac{\sin(2x)}{2}\right]_{\pi}^{k}$$

$$A = 3k - \frac{\sin(2k)}{2} - \left(3\pi - \frac{\sin(2\pi)}{2}\right)$$

$$A = 3k - \frac{\sin(2k)}{2} - 3\pi$$

(b) Bepaal die volume wanneer die gearseerde oppervlakte hieronder om die *x*-as geroteer word tot een desimale plek.





$$vol = \pi \int_{-1,4}^{1,4} \sec^2 x \, dx$$

$$= \pi \left[\tan(1,4) - \tan(-1,4) \right]$$

$$= 36,4 \text{ eenhede}^3$$

ALTERNATIEWE MEMO VIR DIÉ WAT DIE VERKEERDE FORMULE GEBRUIK SOOS VOORSIEN IN DIE INLIGTINGSBOEKIE

$$vol = \int_{-1,4}^{1,4} \sec^2 x \, dx$$

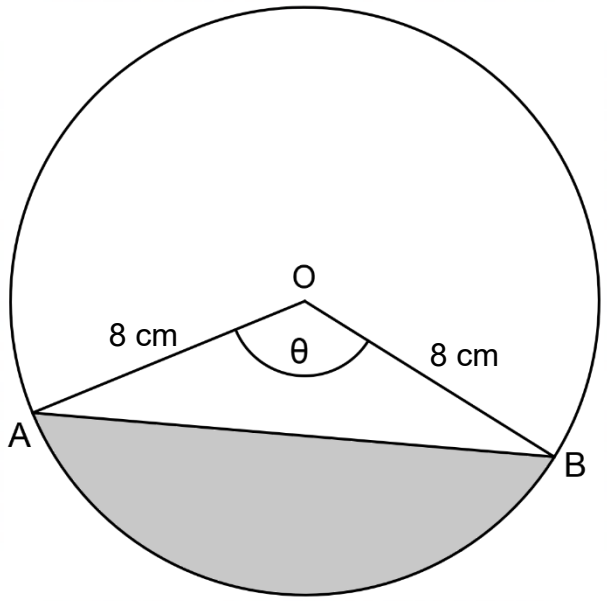
$$= \pi[\cot(1,4) - \cot(-1,4)]$$

$$= 1,1 \ units^3$$

IEB Copyright © 2024

VRAAG 11

In die diagram hieronder is O die middelpunt van die sirkel. $A\hat{O}B = \theta$ en $AO = BO = 8$ cm. Die gearseerde oppervlakte is 45 cm^2.



Gebruik die Newton-Raphson-metode en bepaal θ (in radiale) tot 5 desimale plekke.

Jy moet:

- Die vergelyking toon wat jy oplos.
- Die iteratiewe formule toon wat jy sal gebruik.
- 'n Aanvanklike benadering $\theta_0 = 1$ gebruik.
- θ_1 tot 5 desimale plekke gee.

Gearseerde oppervlakte $=$ sektor – driehoek

$$= \frac{1}{2}(8^2)\theta - \frac{1}{2}(8^2)\sin\theta$$
$$= 32\theta - 32\sin\theta$$

$$\therefore 32\theta - 32\sin\theta = 45$$
$$\therefore 32\theta - 32\sin\theta - 45 = 0$$
$$\therefore f(\theta) = 0$$

$$\therefore \theta_{n+1} = \theta - \frac{32\theta - 32\sin\theta - 45}{32 - 32\cos\theta}$$
$$\therefore \theta_1 = 3{,}71422$$
$$\theta = 2{,}20926$$

Totaal: 200 punte

IEB Copyright © 2024