INTERNASIONALE SEKONDÊRE SERTIFIKAAT-EKSAMEN
NOVEMBER 2024

VERDERE STUDIES WISKUNDE (UITGEBREID): VRAESTEL II

NASIENRIGLYNE

Tyd: 1 uur 100 punte

Hierdie nasienriglyne is opgestel vir gebruik deur eksaminators en hulpeksaminators van wie verwag word om almal 'n standaardiseringsvergadering by te woon om te verseker dat die riglyne konsekwent vertolk en toegepas word by die nasien van kandidate se skrifte.

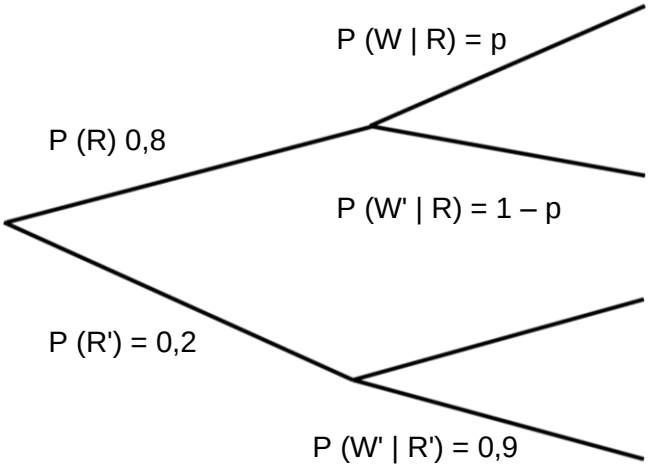
Die IEB sal geen bespreking of korrespondensie oor enige nasienriglyne voer nie. Ons erken dat daar verskillende standpunte oor sommige aangeleenthede van beklemtoning of detail in die riglyne kan wees. Ons erken ook dat daar sonder die voordeel van die bywoning van 'n standaardiseringsvergadering verskillende vertolkings van die toepassing van die nasienriglyne kan wees.

IEB Copyright © 2024

MODULE 2 STATISTIEK

VRAAG 1

1.1 (a)



(b) $0,8p+0,2(0,1) = 0,5$

$p = 0,6$

1.2 (a) 'n Kontinuïteitskorreksie word toegepas wanneer 'n kontinue verdeling gebruik word om 'n diskrete verdeling te benader.

(b) (1) $np = 2,8$
Aangesien $np < 5$ moet geen benadering gebruik word nie.

(2) $np = 28 > 5$; $nq = 42 > 5$ ja 'n normaalbenadering kan gebruik word, N (28;16,8)

IEB Copyright © 2024

VRAAG 2

2.1 (a) $\bar{X} = \frac{8,3 + 9,9}{2} = 9,1$ ✓

$$1,645 \times \frac{\sigma}{\sqrt{40}} = 9,9 - 9,1$$

$$\sigma = 3,08$$

(b) $100(0,05) = 5$

2.2 (a) $H_0 : \mu = 300$

$H_1 : \mu < 300$

(b)

$$\frac{298 - 300}{\frac{\sigma}{\sqrt{120}}} < -2,33$$

$$\sigma < 9,4$$

VRAAG 3

(a) $X \sim N(6,5;1,15^2)$

$$P(X > 5) = P\left(Z > \frac{5-6,5}{1,15}\right)$$
$$= P(Z > -1,3)$$
$$= 0,5 + 0,4032$$
$$\approx 0,9$$

of sakrekenaar:

$$P(X > 5) = P\left(Z > \frac{5-6,5}{1,15}\right)$$
$$= P(Z > -1,30435)$$
$$= 0,9039$$
$$\approx 0,9$$

(b) $P(X < t) = 0,05$

$$-1,645 = \frac{t-6,5}{1,15}$$
$$t = 4,6$$

$\therefore$ 4 jaar en 7 maande

of sakrekenaar:

$$-1,6449 = \frac{t-6,5}{1,15}$$
$$= 4,6083$$

(c) $X \sim B(10;0,1)$

$$P(X \leq 1) = \binom{10}{0}(0,1)^0(0,9)^{10} + \binom{10}{1}(0,1)(0,9)^9$$
$$= 0,7361$$

Let wel: Indien hulle p = 0,9032 gebruik (volgens presiese antwoord in (a)), dan is p(x ≤ 1) = 0,74847.

(d) $X \sim B(9;0,1)$

$$= P(X = 1) \times 0,1$$
$$= \binom{9}{1}(0,1)(0,9)^8 \times 0,1$$
$$= 0,0387$$

(e) $$P(X < 3 \mid X < 5) = \frac{P(X < 3)}{P(X < 5)}$$
$$= \frac{P(Z < \frac{3-6,5}{1,15})}{0,1}$$
$$= \frac{P(Z < -3,04)}{0,1}$$
$$= \frac{0,5 - 0,49882}{0,1}$$
$$= 0,0118$$

Met sakrekenaar (antwoord = 0,01138)

IEB Copyright © 2024

VRAAG 4

4.1 (a) $2p+q+0,3=1$

$\therefore 2p+q=0,7 \quad ...(1)$

$p+0,4+0,3+4q=2,45$

$p+4q=1,75 \quad ...(2)$

$\therefore p=0,15 \quad q=0,4$

(b) $P(X<2,45)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)$

$=2(0,15)+0,2$

$=0,5$

4.2 (a) $A=\frac{1}{4}\pi\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^2$

$=\frac{\pi}{2}\left(\frac{2}{\pi}\right)$

$=1$

$\therefore$ 'n waarskynlikheiddigtheidsfunksie

(b) $\cos A\hat{O}B=\frac{\frac{\sqrt{3}}{\pi}}{\frac{2}{\sqrt{\pi}}}$

$\cos A\hat{O}B=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$A\hat{O}B=\frac{\pi}{6}$

(c) $P\left(X<\sqrt{\frac{3}{\pi}}\right)=A_{\text{sektor}}+A_{\Delta}$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^2\left(\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{3}{\pi}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)$ ✓

$=0,9423$

IEB Copyright © 2024

VRAAG 5

5.1

$$\frac{\binom{5}{1}\binom{3}{2}\binom{4}{2}+\binom{5}{1}\binom{3}{3}\binom{4}{1}+\binom{5}{1}\binom{3}{1}\binom{4}{3}}{\binom{12}{5}}$$

$$=\frac{85}{396}\,(0,21465)$$

5.2

$$\frac{44}{100}\times\frac{14}{99}+\frac{19}{100}\times\frac{25}{99}+\frac{25}{100}\times\frac{24}{99}$$
$$=0,1708$$

OF

$$\left(\frac{19}{100}\times\frac{39}{99}\right)+\left(\frac{25}{100}\times\frac{38}{99}\right)$$
$$=0,1708$$

OF

$$\left(\frac{3}{100}\times\frac{39}{99}\right)+\left(\frac{8}{100}\times\frac{39}{99}\right)+\left(\frac{25}{100}\times\frac{38}{99}\right)+\left(\frac{8}{100}\times\frac{39}{99}\right)$$
$$=0,1708$$

OF

$$\left(\frac{19}{100}\times\frac{39}{99}\right)+\left(\frac{25}{100}\times\frac{14}{99}\right)+\left(\frac{25}{100}\times\frac{24}{99}\right)$$
$$=0,1708$$

Totaal vir Module 2: 100 punte

IEB Copyright © 2024

MODULE 3 FINANSIES EN MODELLERING

VRAAG 1

Shailen verkry nou 'n lening van R15 000 en 6 jaar van nou af 'n verdere Rx. Die lening moet terugbetaal word deur middel van halfjaarlikse paaiemente van Ry wat oor 6 maande begin en oor 10 jaar eindig.

(a) Bereken x indien y = 3 500 en die rentekoers konstant bly op 10% per jaar, halfjaarliks saamgestel.

$$15\,000\left(1+\frac{0,2}{2}\right)^{20}+x\left(1+\frac{0,1}{2}\right)^{8}=\frac{3\,500\left[\left(1+\frac{0,1}{2}\right)^{20}-1\right]}{\frac{0,1}{2}}$$

$$x=R51\,393,34$$

(b) Bereken y indien x = R10 000 en die rente vir die eerste 6 jaar 10% per jaar, halfjaarliks saamgestel, is en 12% per jaar, halfjaarliks saamgestel, vir die oorblywende 4 jaar.

$$15\,000\left(1+\frac{0,1}{2}\right)^{12}\left(1+\frac{0,12}{2}\right)^{8}+10\,000\left(1+\frac{0,12}{2}\right)^{8}$$

$$=\frac{y\left[\left(1+\frac{0,1}{2}\right)^{12}-1\right]\left(1+\frac{0,12}{2}\right)^{8}}{\frac{0,1}{2}}+\frac{y\left[\left(1+\frac{0,12}{2}\right)^{8}-1\right]}{\frac{0,12}{2}}$$

$$\therefore y=\text{R}1\,669,36$$

IEB Copyright © 2024

VRAAG 2

'n Lening word verkry en moet terugbetaal word deur middel van 120 maandelikse paaiemente wat na een maand begin met rente wat bereken word teen 12% per jaar, maandeliks saamgestel. Die totale rente wat oor die termyn van die lening betaal word, is R1 443 302,76.

(a) Bereken die maandelikse paaiement en toon dat die leningsbedrag R2 000 000 is.

(1) $$P = \frac{x\left[1-\left(1+\frac{0,12}{12}\right)^{-120}\right]}{\frac{0,12}{12}}$$

(2)

$$120x - P = \text{R}144\,3302,76$$

$$\therefore 120x - 144\,3302,76 = \frac{x\left[1-\left(1+\frac{0,12}{12}\right)^{-120}\right]}{\frac{0,12}{12}}$$

$$x = \text{R}28\,694,19$$

$$\therefore P = 120(28\,694,19) - 144\,3302,76$$

$$= \text{R}200\,0000$$

(b) Bereken die rente wat in die 81ste maand betaal word.

$$\text{Uitstaande saldo}_{80} = \frac{28\,694,19\left[1-\left(1+\frac{0,12}{12}\right)^{-40}\right]}{\frac{0,12}{12}}$$

$$= \text{R}942\,164,72$$

$$\therefore \text{Rente} = 942\,164,72 \times \frac{0,12}{12}$$

$$= \text{R}9\,421,65$$

IEB Copyright © 2024

VRAAG 3

'n Spaarskema, waar rente maandeliks bereken word, word deur die volgende rekursie-vergelyking voorgestel:

$F_{n+1} = aF_n + 1\,200\,(1{,}08)^n$; $F_0 = b$

(a) Na 1 maand is die saldo R3 230 en na 2 maande is dit R4 574,45.
Bereken *a* en *b*.

(i) Die aanvanklike bedrag

$3\,230 = ab + 1\,200$

$2\,030 = ab$

$4\,574{,}45 = 3\,230a + 1\,200(1{,}08)$

$3\,278{,}45 = 3\,230a$

$a = 1{,}015$

$\therefore b = \dfrac{2\,030}{1{,}015}$

$= \text{R}2\,000$

(ii) Die effektiewe koers as 'n persentasie korrek tot 2 desimale plekke.

i = 0,015

$r_{eff} = (1 + 0{,}015)^{12} - 1$

$= 12{,}68\%$

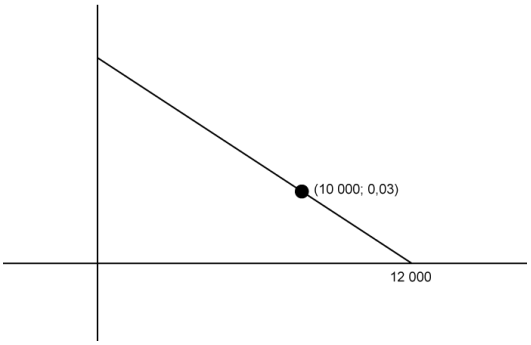
IEB Copyright © 2024

VRAAG 4

'n Populasie, P_n, groei logisties binne 'n omgewing met 'n vaste dravermoë K. By die punt waar die populasie teen sy vinnigste tempo groei, is P_n = 6 000.

Verder, wanneer P = 10 000, dan is $\frac{\Delta P}{P} = 0,03$.

(a) Skets die grafiek van $\frac{\Delta P}{P}$ teen P en dui minstens twee punte op die grafiek aan.



(b) Bewys dat: $P_{n+1} = 1,18P_n - 0,000015P_n^2$

$$m = \frac{0 - 0,03}{12\,000 - 10\,000}$$

$$= -0,000015$$

$$\therefore P_{n+1} = -\frac{0,03 - a}{10\,000} = -0,000015$$

$$a = 0,18$$

$$P_n + 0,18P_n\,(1 - \frac{P_n}{12\,000})$$

(c) Bepaal $\frac{\Delta P}{P}$ wanneer die groeikoers op sy hoogste is.

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{0,18}{2} = 0,09$$

IEB Copyright © 2024

VRAAG 5

Daar is 'n fassinerende verwantskap tussen die witdoodshaai en die Kaapse pelsrob in die waters rondom Robbeiland naby die kus van Kaapstad. Die haaie gebruik 'n jagtegniek wat 'n sprong uit die water behels, waar hulle hulle vertikaal uit die water lanseer om robbe te vang wat naby die oppervlak swem.





Witdoodshaaie, waarvan 30% vermoedelik voortplant, het tipies 'n klein werpsel elke twee jaar. Die witdoodshaai het 'n lang leeftyd, maar dit kan as 12 jaar geneem word in terme van hul interaksie met die eiland. Daar is tans 6 gereelde roofdiere rondom die eiland. Elke haai kan tot 45 robkleintjies per jaar vreet.



Vroulike Kaapse pelsrobbe produseer tipies 'n enkele kleintjie elke nege maande met 'n sterftekoers van 15% vir die kleintjies. Neem aan dat 'n kwart van die robpopulasie voortplant en dat daar tans ongeveer 1 500 robbe is in die waters om die eiland met 'n vermoë van 1 650. Met die voorkoms van haaie word die ewewig van robbe as 228 voorspel. Beskou 'n jaarlikse siklus.

(a) Bereken die intrinsieke groeikoers van die robbe tot 4 desimale plekke.

$$a = 0{,}85 \times 0{,}25 \times 1 \times \frac{12}{9}$$
$$= 0{,}2833$$

(b) Bepaal die koers van suksesvolle aanvalle deur die haaie op die robbe.

$b.F_0.R_0 =$ afname in robbe

$$b \times 6 \times 1\,500 = 45 \times 6$$
$$b = 0{,}03$$

IEB Copyright © 2024

(c) Bereken 'n beraming van die werpselgrootte van die witdoodshaai.

$$228 = \frac{1/12}{f \times 0{,}03}$$

$$\therefore f = 0{,}0122$$

$$fbR_0F_0 = 0{,}03 \times 0{,}0122 \times 6 \times 1500 = 0{,}3 \times 6 \times \frac{x}{2}$$

$$\therefore x = 3{,}66$$

Dus 3 of 4.

(d) Bepaal die ewewigsgetal haaie.

$$F_E = \frac{0{,}2833}{0{,}03}\left(1 - \frac{228}{1650}\right)$$

$$= 8{,}14$$

d.w.s. ongeveer 8

IEB Copyright © 2024

VRAAG 6

Twee gelyktydige rekursievergelykings word soos volg gegee:

$$y_{n+1} = \frac{3y_n}{5\,000}\left(1\,250 + x_n\right) \qquad y_0 = 10$$

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2\,000}\left(3\,000 - x_n - 60y_n\right) \qquad x_0 = 100$$

(a) Bereken $(x_2; y_2)$.

$$y_1 = \frac{3\,(10)}{500}\ (1\,250 + 100) = 8{,}1$$

$$x_1 = \frac{100}{2\,000}\ (3\,000 - 100 - 60\,(10)) = 115$$

(b) Bepaal die ewewigswaardes van x en y.

$$y_{n+1} = y_n \ ; x_{n+1} = x_n$$

$$5\,000 = 3\,(1\,250 + x_e)$$

$$x_e = 416\,\frac{2}{3}$$

$$2\,000 = 3\,000 - 416\tfrac{2}{3} - 60 \times y_e$$

$$y_e = 9\,\frac{13}{18}$$

Totaal vir Module 3: 100 punte

IEB Copyright © 2024

MODULE 4 MATRIKSE EN GRAFIEKTEORIE

VRAAG 1

1.1 (a) Rotasie antikloksgewys deur 90°

(b) 'n Dwarsdruk *y*-as invariant
Skaalfaktor van ½
OF

$$x \Rightarrow x$$
$$y = y + \frac{1}{2}x$$

(c) 'n Strek met die *x*-as invariant met faktor van 3,
dan refleksie in $y = -x$.

OF

Roteer 90 grade kloksgewys,
dan 'n strek met 'n skaalfaktor van -3 met invariant *y*-as.

1.2 (a) Bepaal die transformasiematriks wat ΔABC op $\Delta A^1B^1C^1$ afbeeld.

$$M \times \begin{bmatrix} 7 & 5 & 11 \\ 6 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 9 & 15 \\ 6 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{of}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & 5 & 11 \\ 6 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 9 & 15 \\ 6 & 2 & 2 \end{bmatrix} \text{ voor vermenigvuldiging}$$

$7 + 6k = 19$; $k = 2$

(b) Dwarsdruk met faktor 2 invariant *x*-as

(c) Verhouding 1; oppervlakte bly onveranderd.

IEB Copyright © 2024

VRAAG 2

2.1 (a) vierkantige

(b) nienul

2.2

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ x & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x+2 & 7 \\ 7-x & 7 \end{bmatrix}$$

$4+x = 3x+2$

$x = 1$

2.3

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -5 & 3 & 8 \\ 0 & 13 & -1 & -10 \\ 1 & 3 & 2 & -3 \end{array}\right] 2R_3 - R_1 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -5 & 3 & 8 \\ 0 & 13 & -1 & -10 \\ 0 & 11 & 1 & -14 \end{array}\right] R_3 + R_2$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -5 & 3 & 8 \\ 0 & 13 & -1 & -10 \\ 0 & 24 & 0 & -24 \end{array}\right]$$

$y = -1$
$z = -3$
$x = 6$ (7)

2.4 (a)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} - 0 + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$= 24 - 0 - 2 = 22$

(b) Kofaktor A $= \begin{bmatrix} 24 & 5 & -4 \\ -12 & 3 & 2 \\ -2 & -5 & 4 \end{bmatrix}$

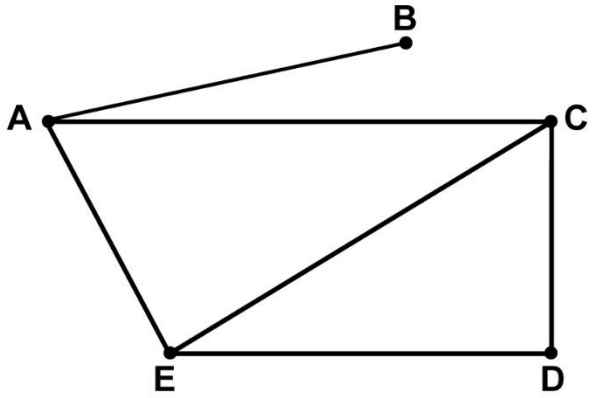
(c) $\frac{1}{22}\begin{bmatrix} 24 & -12 & -2 \\ 5 & 3 & -5 \\ -4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

IEB Copyright © 2024

VRAAG 3

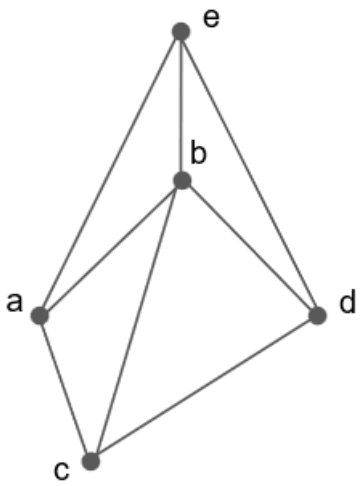
3.1 Pare skakels wat nodusse verbind: A; D; E; G

3.2



3.3 (a) Grafiek (i) het meer skakels as Grafiek (ii)

(b) (a, e) of (d, e)



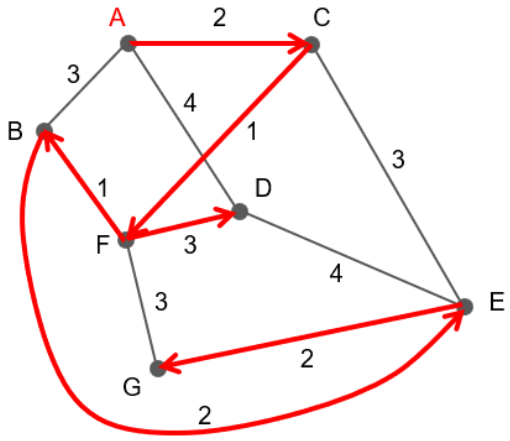
IEB Copyright © 2024

VRAAG 4

4.1

A – C	2
C – F	1
F – B	1
B – E	2
E – G	2
F – D	3

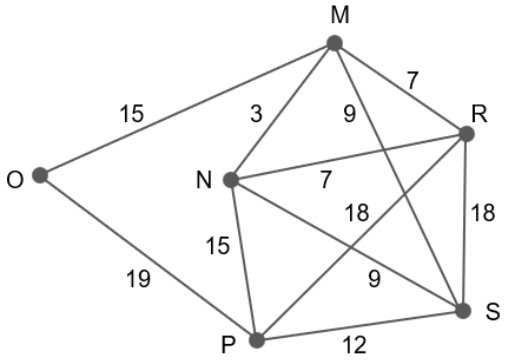
Totaal = 11



4.2 (a)

O – M – N – R – S – P – O (15, 3, 7, 18, 12, 19) keer terug na O

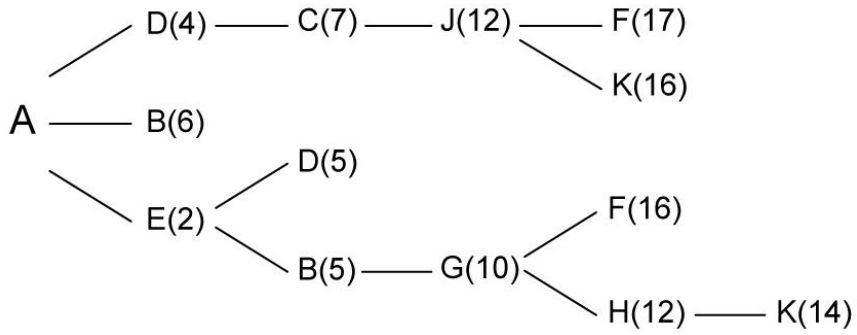
Totaal = 74



(b) Byvoorbeeld: O – M – R – N – S – P – O = 69

VRAAG 5

(a)



A E B G H K (14)

(b) A E B G H K na J = 18
(14) (4)

(c) Driehoekongelykheid $1 < BF < 11$

AEBFK is die kortste roete
$\therefore BF + 8 < 14$ $BF < 6$

$1 < BF < 6$

Totaal vir Module 4: 100 punte

IEB Copyright © 2024