INTERNASIONALE SEKONDÊRE SERTIFIKAAT-EKSAMEN
NOVEMBER 2023

VERDERE STUDIE WISKUNDE (UITGEBREI): VRAESTEL II

NASIENRIGLYNE

Tyd: 1 uur 100 punte

Hierdie nasienriglyne word voorberei vir gebruik deur eksaminatore en hulpeksaminatore. Daar word van alle nasieners vereis om 'n standaardiserings-vergadering by te woon om te verseker dat die nasienriglyne konsekwent vertolk en toegepas word tydens die nasien van kandidate se skrifte.

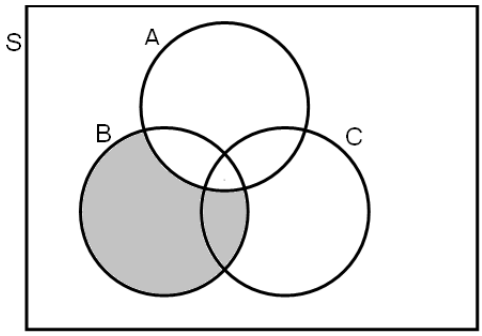
Die IEB sal geen gesprek aanknoop of korrespondensie voer oor enige nasienriglyne nie. Daar word toegegee dat verskillende menings rondom sake van beklemtoning of detail in sodanige riglyne mag voorkom. Dit is ook voor die hand liggend dat, sonder die voordeel van bywoning van 'n standaardiseringsvergadering, daar verskillende vertolkings mag wees oor die toepassing van die nasienriglyne.

IEB Copyright © 2023

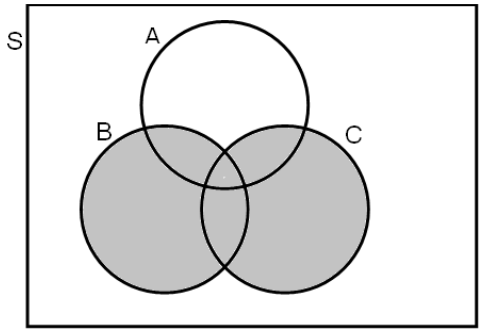
MODULE 2 STATISTIEK

VRAAG 1

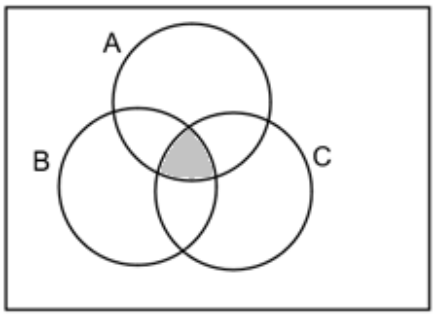
1.1 (a)



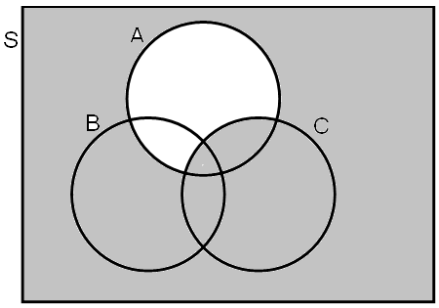
(b)



(c)



(d)



1.2 (a) $P(F \cap L) = \frac{63}{180} = \frac{7}{20}$

(b) $P(F) \times P(L) = P(F \cap L)$

$\frac{108}{180} \times \frac{x}{180} = \frac{7}{20}$

$x = 105$

VRAAG 2

$X \sim N\left(10;4^2\right)$

(a) $P\left(12 < X < 15\right) = P\left(\dfrac{12-10}{4} < Z < \dfrac{15-10}{4}\right)$

$= P\left(0,5 < Z < 1,25\right)$

$= 0,3944 - 0,1915$

$= 0,2029$

(b) $P\left(X > a\right) = 0,08$

$1,405 = \dfrac{a-10}{4}$

$a = 15,62 \ \therefore 16$ minute

(c) $P\left(X > 15 \middle| X > 12\right) = \dfrac{P\left(X > 15\right)}{P\left(X > 12\right)}$

$= \dfrac{0,5 - 0,3944}{0,5 - 0,1915}$

$= 0,3423$

(d) $X \sim B\left(6;\ 0,2029\right)$

$P\left(X = 2\right) = \binom{6}{2} \left(0,2029\right)^2 \ \left(0,7971\right)^4$

$= 0,2493$

IEB Copyright © 2023

VRAAG 3

3.1 (a) 'n 96%-vertrouensinterval vir μ is:

$$\bar{x} = \frac{565}{220} = 2{,}57$$

$$2{,}57 \pm 2{,}05 \times \frac{1{,}45}{\sqrt{220}}$$

$$(2{,}37;\ 2{,}77)$$

(b) 3 is nie in die vertrouensinterval nie, gevolglik is Naomi se bewering ongeregverdig/foutief.

3.2 $H_0 : \mu_x - \mu_y = 140$

$H_1 : \mu_x - \mu_y > 140$

Verwerp H_0 indien $Z > 1{,}645$

Toetsstatistiek:

$$Z = \frac{(1752 - 1598) - 140}{\sqrt{\frac{50^2}{40} + \frac{20^2}{50}}}$$

$= 1{,}67$ ✓

Gevolgtrekking: Aangesien $Z > 1{,}645$ verwerp die H_0 by die 5%-betekenispeil en gevolglik voldoende bewys om te beweer dat die gemiddelde van X met minstens 140 groter is as die gemiddelde van Y.

IEB Copyright © 2023

VRAAG 4

(a) $p = 0,45$

(b) 0,25

(c) $(0,75)^2\,(0,25)$
$= 0,1406$

(d) $E[K] = 1(0,15) + 2\,(0,45) + 3(0,35) = 2,1$
$\sigma^2 = 1(0,15) + 4\,(0,45) + 9(0,35) - (2,1)^2$
$\sigma = 0,8307$

(e) $P(M+K>4) = P(M=2)\times P(K=3) + P(M=3)\times P(K=2) + (M=3)\times P(K=3)$
$= (0,45)\,(0,35) + (0,25)\,(0,45) + (0,25)\,(0,35)$
$= 0,3575$

VRAAG 5

(a) Die modus het die hoogste waarskynlikheid, aangesien dit die waarde is wat die meeste voorkom.

(b) $\int_0^4 kx^2\,dx = \frac{1}{2}$

$\left[\frac{kx^3}{3}\right]_0^4 = \frac{1}{2}$

$\frac{64k}{3} = \frac{1}{2}$

$k = \frac{3}{128}$

(c) $\frac{1}{2}(p-4)\left(\frac{3}{8}\right) = \frac{1}{2}$

$p - 4 = \frac{8}{3}$

$p = \frac{20}{3}$

IEB Copyright © 2023

VRAAG 6

(a) $\underline{6 \text{ of } 8}\ _\ _\ _\ _\ _\ _\ _$

$\frac{7!}{2!2!2!} \times 2 = 1260$ of $\frac{1}{2} \times \frac{8!}{2!2!2!2!}$

(b) Opsie 1: Al 4 getalle is verskillend (bv. 6 842 – moet met 6 of 8 begin)

$3! \times 2 = 12$ of $\frac{1}{2} \times 4! = 12$

$\left(\text{volgens simmetrie } \frac{1}{2} \text{ van alle moontlike rangskikkings}\right)$ of $2 \times {}^3P_3 = 12$

Opsie 2: 1 dubbel/herhaling en 2 verskillend (bv. 6 228 – moet met 6 of 8 begin)

6_ _ _ + 66_ _ + 8_ _ _ + 88_ _

$= \left(3 \times 1 \times 2 \times \frac{3!}{2!} + \binom{3}{2} \times 3!\right) \times 2 = 72$

OF

$\frac{1}{2} \times \frac{4!}{2!} \times 4 \times \binom{3}{2} = 72$

$\left(\frac{1}{2} \text{ van alle moontlike rangskikkings} \times \text{rangskikking} \times \#\text{moontlike dubbels} \times \text{keuse van 2 uit 3 ander syfers}\right)$

Opsie 3: 2 dubbels/herhalings (bv. 6622)

66 _ _ + 88_ _

$3 \times \frac{3!}{2!} \times 2 = 18$

OF

$\frac{1}{2} \times \frac{4!}{2!2!} \times \binom{4}{2} = 18$

$\left(\frac{1}{2} \text{ van alle moontlike rangskikkings} \times \text{rangskikking} \times \text{keuse van 2 pare uit 4 syfers}\right)$

Gevolglik totale opsies:
$12 + 72 + 18 = 102$

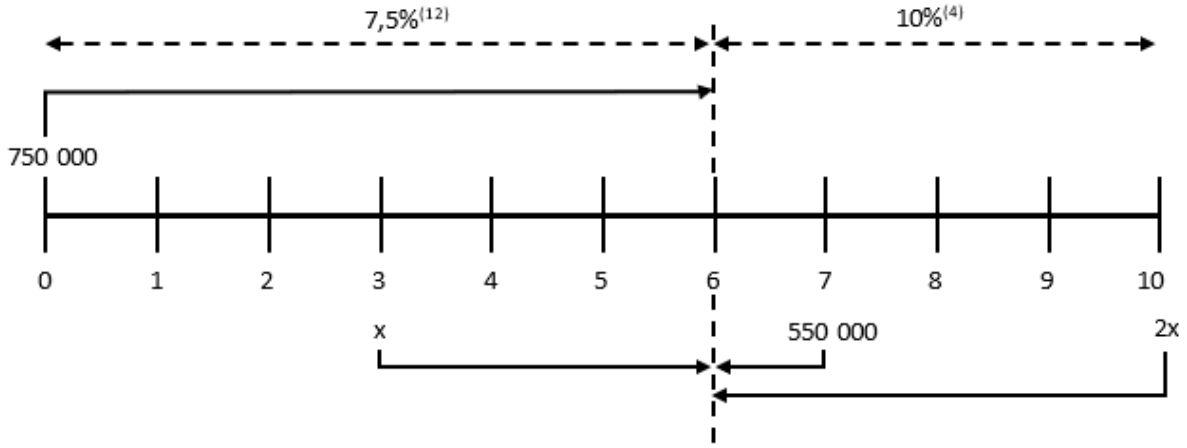
Totaal vir Module 2: 100 punte

IEB Copyright © 2023

MODULE 3 FINANSIES EN MODELLERING

VRAAG 1

(a)



$$750\,000\left(1+\frac{0{,}075}{12}\right)^{72}=x\left(1+\frac{0{,}075}{12}\right)^{36}+550\,000\left(1+\frac{0{,}1}{4}\right)^{-4}+2x\left(1+\frac{0{,}1}{4}\right)^{-16}$$

$\therefore\ x$ = R260251,76

(b) $550\,000\left(1+\frac{0{,}1}{4}\right)^{-4}+2\times 260251{,}76\left(1+\frac{0{,}1}{4}\right)^{-16}$

= R848 897,01

VRAAG 2

$$\left(1+\frac{r}{2}\right)^2 = \left(1+\frac{0{,}08}{4}\right)^4$$

$$r = 0{,}0808$$

$$F = \frac{30\,000\left[\left(1+\frac{0{,}08}{4}\right)^{61}-1\right]}{\frac{0{,}08}{4}} + \frac{100\,000\left[\left(1+\frac{0{,}0808}{2}\right)^{30}-1\right]}{\frac{0{,}0808}{2}}$$

R9 166 092,92

VRAAG 3

(a) $P \times i = 15\,000$

$$i = \frac{15\,000}{1500\,000} = 0{,}01$$

$$1\,500\,000\,(1+0{,}01)^{11} = \frac{x\left[1-(1+0{,}01)^{-109}\right]}{0{,}01}$$

$$x = \text{R}25\,281{,}09$$

(b) $$\text{Beginsaldo}_{72} = 1\,500\,000\,(1+0{,}01)^{72} - \frac{25\,281{,}09\left[(1{,}01)^{61}-1\right]}{0{,}01}$$

$$= \text{R}960\,022{,}62$$

$$\text{Beginsaldo}_{84} = 1\,500\,000(1{,}01)^{84} - \frac{25\,281{,}09\left[(1{,}01)^{73}-1\right]}{0{,}01}$$

$$= \text{R}761\,150{,}02$$

$\therefore \Delta BS = \text{R}198\,872{,}60$

$\therefore$ Rente = 12 × 25 781,09 – 198 872,60

= 104 500,48

VRAAG 4

(a) (i) 0,08

(ii) $m = \frac{0,064 - 0,08}{400}$

$= -0,000\ 04$

$\therefore \frac{r}{k} = 0,000\ 04$

$\therefore k = \frac{0,08}{0,000\ 04} = 2\ 000$

(iii) $\frac{\Delta P}{P} = -0,000\ 04\ P + 0,08$

$\therefore 0,032 = -0,000\ 04\ P + 0,08$

$\therefore P = 1\ 200$

(b) $P_{n+1} = P_n + 0,08\ P_n\left(1 - \frac{P_n}{2000}\right)$

(c) $\frac{2\ 000}{2} = 1\ 000$ inwoners

27–28 siklusse/iterasies

IEB Copyright © 2023

VRAAG 5

(a) $a = 0,6 \times 1 \times 1 \times 0,8$

$= 0,48$

(b) $20 \times 10 = 20 \times 500 \times b$

$\therefore b = 0,02$

(c) $f(0,02)(20)(500) = 15$

$\therefore f = 0,075$

(d) $95 = \dfrac{c}{0,075 \times 0,02}$

$\therefore c = 0,1425$

(e) $20 = \dfrac{0,48}{0,02}\left(1 - \dfrac{0,1425}{0,015 \times 0,02 \times K}\right)$

$K = 570$

VRAAG 6

(a) $9 = 5a - 3 + b$

$\therefore b = 12 - 5a$

$15 = 9a - 5 + b$

$b = 20 - 9a$

$\therefore a = 2$ en $b = 2$

(b) $T_5 = 2(15) - 9 + 2$

$= 23$

$T_6 = 2(23) - 15 + 2$

$= 33$

(c) Verskil neem toe met 2 …

$\therefore T_n = T_n - 1 + 2(n - 1)$

$\therefore T_n = T_{n-1} + 2n - 2$

Totaal vir Module 3: 100 punte

MODULE 4 MATRIKSE EN GRAFIEKTEORIE

VRAAG 1

1.2 Twee kolomme is 'n herhaling van mekaar of volume is nul.

1.3 (a) $A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & -p & 0 \end{bmatrix}$

(b) $\det(A) = 0 - (-p)(4+6) + 0$ deur kolom 3 te gebruik
$= 10p$

$\det(A^T) = 0 - (-p)(4+6) + 0$ deur ry 3 te gebruik
$= 10p$
$\therefore \det(A) = \det(A^T)$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & -7 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & -7 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 10 \\ 5 & 54 & 10 \\ 10 & 10 & 20 \end{pmatrix}$ vir elke ry (kolom)

(d) Ja, aangesien A 'n refleksie van A^T is.

IEB Copyright © 2023

VRAAG 2

$x + 3y - 2z = -7$
$4x + y + z = 5$
$2x - 5y + 7z = 19$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 5 \\ 19 \end{bmatrix}$$

$R_2 - 4R_1$; $R_3 - 2R_1$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & -2 & -7 \\ 0 & -11 & 9 & 33 \\ 0 & -11 & 11 & 33 \end{array}\right]$$

$R_3 - R_2$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & -2 & -7 \\ 0 & -11 & 9 & 33 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$z = 0$

$-11y = 33$
$y = -3$

$x + 3(-3) + 0 = -7$
$x = 2$

IEB Copyright © 2023

VRAAG 3

3.1 $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 4 & 4 & -1\\ 1 & 1 & 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 4 & 4 & -1\\ 2 & 2 & 4 & 4\end{pmatrix}$

3.2 Oppervlakte is 2 × die oorspronklike.

3.3 $+\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & -1 & -1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 4 & 4 & -1\\ 1 & 1 & 3 & 3\end{bmatrix}$

3.4 $m=\frac{2}{3}$

$\tan\theta = 2/3$ Rad = 0,588

$\theta = 33,69$

$\begin{bmatrix}\cos 33,69 & -\sin 33,69\\ \sin 33,69 & \cos 33,69\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 4 & 4 & -1\\ 1 & 1 & 2 & 2\end{bmatrix}$ voor vermenigvuldiging

$\begin{pmatrix}-1,387 & 2,774 & 2,219 & -1,941\\ 0,277 & 3,051 & 3,883 & 1,109\end{pmatrix}$

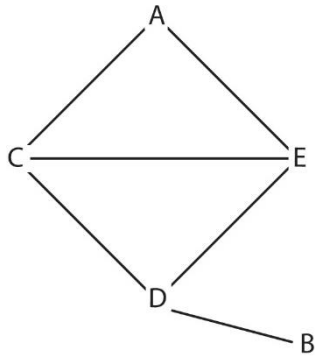
IEB Copyright © 2023

VRAAG 4

4.1 (a)

	A	**B**	**C**	**D**	**E**
A	–		1		1
B		–		1	
C	1		–	1	1
D		1	1	–	1
E	1		1	1	–

(b)



Graad
Skakels

(c) 4 punte het onewe graad

4.2 Gedwing om 'n kring te vorm

VRAAG 5

5.1 E – G 75 (verpligtend)

G – D 30 (of ED)
G – F 35
F – A 40
E – B 45
G – C 65
215

Kabellengte 290

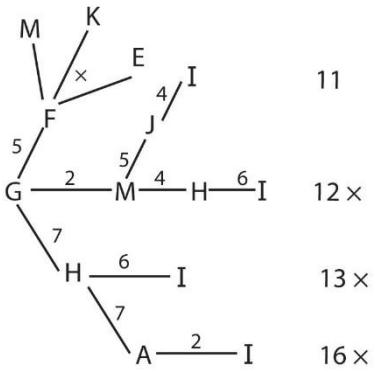
5.2 (a) Som van skakels = 111

Isoleer skakels met onewe graad: A; C; E; G

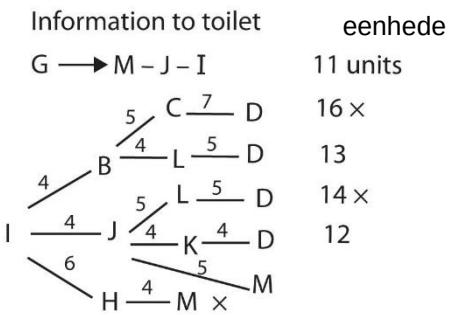
Voeg in: CBA 10
EFG 10

∴ kortste = 111 + 10 + 10 = 131

5.2 (b) Toeris ⟶ inligting



Inligting na toilet



I → J – K – D 12 eenhede
∴ 23 eenhede

VRAAG 6

6.1 $\begin{pmatrix} ab & b^2 \\ -a^2 & -ab \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ab & b^2 \\ -a^2 & -ab \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} a^2b^2 - a^2b^2 & ab^3 - ab^3 \\ -a^3b + a^3b & -a^2b^2 + a^2b^2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$

$\therefore$ B is nulpotent

6.2 (a) $P = 2$

(b) $I - A = \begin{pmatrix} -1 & +2 & 4 \\ +1 & -2 & -4 \\ -1 & +2 & 4 \end{pmatrix}$

$(I - A)^2 = \begin{pmatrix} -1 & +2 & 4 \\ +1 & -2 & -4 \\ -1 & +2 & 4 \end{pmatrix} = I - A$

OF

$(I - A)^2 = I^2 - 2IA + A^2$

$= I - 2A + A$ (aangesien $A^2 = A$)

$= I - A$

Totaal vir Module 4: 100 punte

IEB Copyright © 2023