Plak asseblief die strepieskode-etiket hier

PUNTE-TOTAAL

INTERNASIONALE SEKONDÊRE SERTIFIKAAT-EKSAMEN
NOVEMBER 2023

VERDERE STUDIES WISKUNDE (UITGEBREID): VRAESTEL II

EKSAMENNOMMER

Tyd: 1 uur 100 punte

LEES ASSEBLIEF DIE VOLGENDE INSTRUKSIES NOUKEURIG DEUR

1. Hierdie vraestel bestaan uit 36 bladsye en 'n Inligtingsboekie van 4 bladsye (i–iv). Maak asseblief seker dat jou vraestel volledig is.
2. Hierdie vraestel bestaan uit DRIE modules. Kies **EEN** van die **DRIE** modules en merk (✓) die een wat jy gekies het:

   MODULE 2: STATISTIEK (100 punte) OF ☐
   MODULE 3: FINANSIES EN MODELLERING (100 punte) OF ☐
   MODULE 4: MATRIKSE EN GRAFIEKTEORIE (100 punte) ☐
3. **Beantwoord die vrae op die vraestel en handig dit in aan die einde van die eksamen. Onthou om jou eksamennommer neer te skryf in die spasie wat voorsien word.**
4. Nieprogrammeerbare en niegrafiese sakrekenaars mag gebruik word, tensy anders aangedui.
5. Al die nodige berekeninge moet duidelik getoon word en handskrif moet leesbaar wees.
6. Diagramme is nie op skaal geteken nie.
7. **Afronding van finale antwoorde.**
   MODULE 2: Vier desimale plekke, tensy anders aangedui.
   MODULE 3: Twee desimale plekke, tensy anders aangedui.
   MODULE 4: Twee desimale plekke, tensy anders aangedui.
8. VYF blanko bladsye (bladsy 32–36) word aan die einde van die vraestel ingesluit. Gebruik hierdie bladsye indien jy te min spasie vir 'n vraag het. Dui die nommer van jou antwoord duidelik aan indien jy hierdie ekstra spasie gebruik.

SLEGS VIR KANTOORGEBRUIK

Module 2	V1	V2	V3	V4	V5	V6	**Totaal**
Punte	**14**	**26**	**19**	**17**	**14**	**10**	**100**

Module 3	V1	V2	V3	V4	V5	V6	**Totaal**
Punte	**19**	**10**	**19**	**16**	**23**	**13**	**100**

Module 4	V1	V2	V3	V4	V5	V6	**Totaal**
Punte	**17**	**10**	**17**	**13**	**31**	**12**	**100**

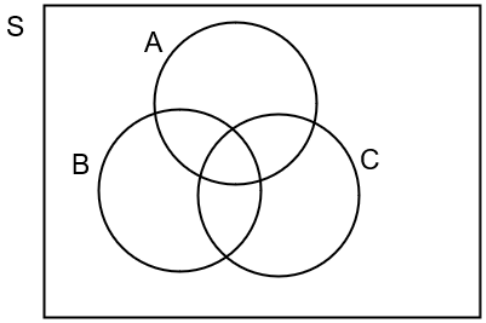
IEB Copyright © 2023

MODULE 2 STATISTIEK

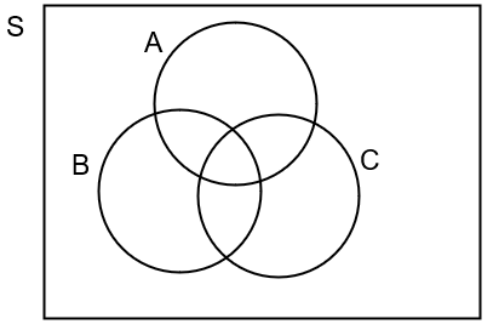
VRAAG 1

1.1 Die Venn-diagramme wat hieronder gegee word, toon die versamelings A, B en C. Arseer in elke geval die gegewe waarskynlikheid.

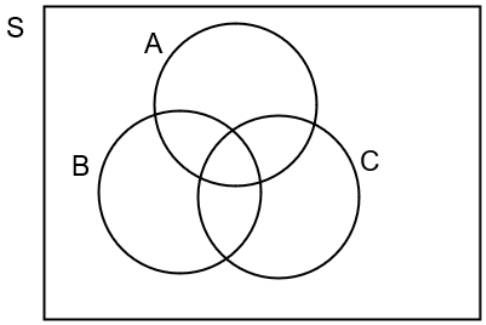
(a) $P(A' \cap B)$ (2)



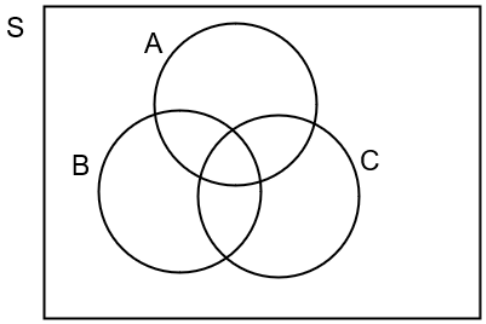
(b) $P(B \cup C)$ (1)



(c) $P(A \cap B \cap C)$ (1)



(d) $P(A' \cup C)$ (2)



IEB Copyright © 2023

1.2 Rebecca het 'n groep vroue en mans gevra of hulle in hul vrye tyd verkies om aan lae-impaksport of hoë intensiteit kardiosport deel te neem. Die volgende tweerigtingstabel toon 'n gedeelte van die resultate van die opname:

	Lae-impaksport	**Hoë intensiteit kardiosport**	**Totaal**
Vroulik	63		
Manlik			72
Totaal			180

(a) Skryf die waarskynlikheid neer dat 'n ewekansig gekose persoon vroulik sal wees en aan lae-impaksport sal deelneem.

(2)

(b) Indien die gebeurtenisse geslag en voorkeur vir 'n bepaalde sportsoort in hierdie steekproef onafhanklik is, bepaal vervolgens die getal mense wat aan lae-impaksport deelneem.

(6)
[14]

IEB Copyright © 2023

VRAAG 2

Die toustaantye, in minute, op Sondagaande by Jordan se winkel op die hoek word deur 'n normaalverdeling met 'n gemiddelde van 10 minute en 'n standaardafwyking van 4 minute gemodelleer.

(a) Bereken die waarskynlikheid dat Zac, 'n ewekansig gekose kliënt, tussen 12 en 15 minute in die ry sal moet staan.

(8)

(b) Bepaal vir 'n lang ry die minimum tyd, korrek tot die naaste minuut, wat hoogstens 8% van die kliënte in die ry vertraag word.

(6)

IEB Copyright © 2023

(c) Gegee dat 'n kliënt, Rahul, vir meer as 12 minute in die ry moet staan, bepaal die waarskynlikheid dat hy vir meer as 15 minute in die ry sal moet staan.

(6)

(d) Ses nuwe kliënte word ewekansig gekies. Bepaal die waarskynlikheid dat twee van hulle tussen 12 en 15 minute in die ry sal moet staan.

(6)
[26]

IEB Copyright © 2023

VRAAG 3

3.1 Greg, 'n geoloog, ondersoek die gemiddelde getal fossiele wat aangetref is in 220 standaardgrootte klipmonsters wat in 'n sekere gebied versamel is.

Sy data word in die tabel hieronder opgesom.

Getal fossiele	0	1	2	3	4	5	6
Getal klippe	11	45	56	61	17	23	7

(a) Bereken 'n 96%-vertrouensinterval vir die gemiddelde getal fossiele wat per klip in daardie gebied aangetref is indien die standaardafwyking 1,45 is.

(7)

(b) Naomi, nog 'n geoloog, beweer dat 'n gemiddelde van 3 fossiele per klip in hierdie gebied aangetref word. Gebruik die vertrouensinterval hierbo om vas te stel of Naomi se bewering geregverdig is.

(2)

IEB Copyright © 2023

3.2 Twee onafhanklike stogastiese veranderlikes is $X \sim N\left(\mu_x;50^2\right)$ en $Y \sim N\left(\mu_y;20^2\right)$.

- 'n Ewekansige steekproef van 40 waarnemings van X lewer 'n steekproef-gemiddelde van 1 752 op.
- 'n Ewekansige steekproef van 50 waarnemings van Y lewer 'n steekproef-gemiddelde van 1 598 op.

Toets by die 5%-betekenispeil of die gemiddelde van X met meer as 140 groter is as die gemiddelde van Y.

(10)
[19]

IEB Copyright © 2023

VRAAG 4

Muhammad skryf in vir 'n skaaktoernooi waar hy elke dag 3 wedstryde speel. Elke wedstryd wat gespeel word, is onafhanklik van die vorige wedstryd wat gespeel is. Laat M die getal wedstryde wees wat Muhammad op enige bepaalde dag van die toernooi wen. Die waarskynlikheidsverdeling vir M word hieronder gegee.

m	0	1	2	3
$P(M=m)$	0,1	0,2	p	0,25

(a) Bepaal die waarde van p.

(1)

(b) 'n Dag word lukraak gekies. Skryf die waarskynlikheid neer dat Muhammad elke wedstryd sal wen wat hy op hierdie dag speel.

(1)

(c) Die toernooi vind oor 3 dae plaas. Bepaal die waarskynlikheid dat Muhammad elke wedstryd net op die derde dag sal wen.

(4)

IEB Copyright © 2023

Kirsten skryf vir dieselfde skaaktoernooi in. Laat K die getal wedstryde wees wat Kirsten op enige bepaalde dag van die toernooi wen. Elke wedstryd wat gespeel word, is onafhanklik van die vorige wedstryd wat gespeel is. Die waarskynlikheids-verdeling vir Kirsten is:

k	0	1	2	3
$P(K=k)$	0,05	0,15	0,45	0,35

(d) Bepaal die standaardafwyking vir die getal wedstryde wat Kirsten op enige bepaalde dag sal wen.

(5)

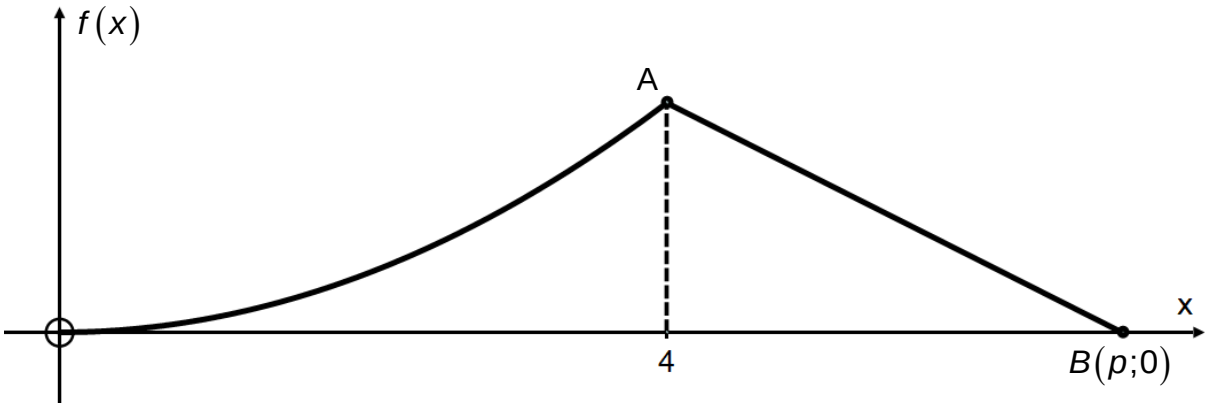
Op die laaste dag van die toernooi speel beide Muhammad en Kirsten hul onderskeie drie wedstryde en hul uitslae is onafhanklik van mekaar.

(e) Bepaal die waarskynlikheid dat hulle saam meer as 4 wedstryde sal wen.

(6)
[17]

VRAAG 5

Die figuur hieronder toon die grafiek van die waarskynlikheiddigtheidsfunksie, $f(x)$, van 'n kontinue stogastiese veranderlike X.



Die grafiek van $f(x)$ bestaan uit 'n:

- geboë segment OA met vergelyking $f(x) = kx^2 \quad 0 \leq x \leq 4$, waar k 'n positiewe konstante is.
- reguitlyn van A na $B(p;0)$ vir $4 < x < p$.

Vir alle ander waardes van x is $f(x) = 0$.

(a) Verduidelik waarom die modus van X by $x = 4$ is.

(1)

Verder is gegee dat die modus van X gelyk is aan die mediaan van X.

(b) Toon aan dat $k = \frac{3}{128}$.

(7)

IEB Copyright © 2023

(c) Bepaal vervolgens die waarde van p.

(6)
[14]

VRAAG 6

Die agt syfers hieronder word op 8 afsonderlike kaarte geskryf.

2, 2, 4, 4, 6, 6, 8, 8

Hierdie kaarte word lukraak langs mekaar geplaas om 'n agtsyfergetal te vorm.

(a) Bepaal hoeveel van die agtsyfergetalle 60 000 000 oorskry.

(4)

Vier kaarte word lukraak gekies en langs mekaar geplaas om 'n viersyfergetal te vorm.

(b) Hoeveel viersyfergetalle kan gevorm word wat 6 000 oorskry?

(6)
[10]

Totaal vir Module 2: 100 punte

IEB Copyright © 2023

MODULE 3 FINANSIES EN MODELLERING

VRAAG 1

'n Lening van R750 000 word nou aangegaan. Rente word gehef teen 7,5% per jaar, maandeliks saamgestel, vir die eerste 6 jaar en daarna 10% per jaar, kwartaalliks saamgestel. Die tydsduur van die lening is 10 jaar. Die totale leningsbedrag sal soos volg terugbetaal word:

Rx ná 3 jaar.

R550 000 ná 7 jaar.

R2x ná 10 jaar.

(a) Gebruik 'n tydlyn, of andersins, en bereken x.

(12)

(b) Bepaal die uitstaande saldo ná 6 jaar.

(7)
[19]

IEB Copyright © 2023

VRAAG 2

Ek belê R30 000 per kwartaal en begin onmiddellik. Verder deponeer ek 'n bykomende R100 000 aan die einde van elke 6 maande. Die rekening lewer rente op teen 'n koers van 8% per jaar, kwartaalliks saamgestel. Hoeveel geld het ná 15 jaar opgehoop?

[10]

IEB Copyright © 2023

VRAAG 3

'n Lening van R1 500 000 word terugbetaal deur gelyke maandelikse betalings wat ná een jaar begin en ná 10 jaar ophou. Die saamgestelde rente wat in die eerste maand ophoop, is R15 000.

(a) Bereken die maandelikse betaling.

(9)

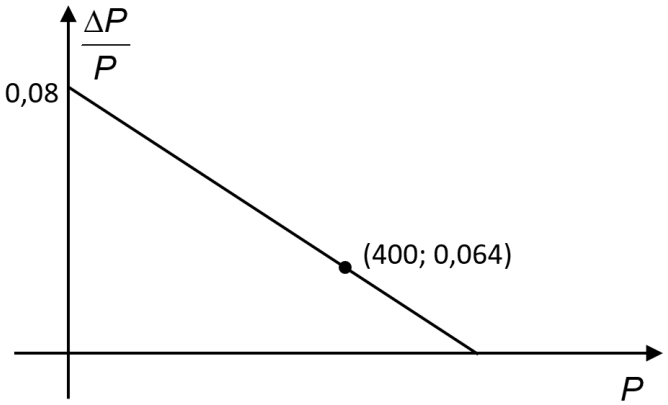
(b) Bereken die rente wat in die 7de jaar betaal word.

(10)
[19]

IEB Copyright © 2023

VRAAG 4

Vir 'n bepaalde populasie is data ingesamel en die lyn van beste passing vir $\frac{\Delta P}{P}$ teen P is 'n reguit lyn. Hierdie lyn word hieronder getoon met y-afsnit (0; 0,08) en 'n punt (400; 0,064).



(a) Uit die inligting wat gegee is:

(1) Skryf die intrinsieke groeikoers neer.

(2)

(2) Bereken die dravermoë.

(3)

(3) Bepaal die populasie wanneer die groeikoers, $\frac{\Delta P}{P}$, gelyk is aan 0,032.

(4)

IEB Copyright © 2023

(b) Skryf 'n rekursievergelyking vir hierdie model.

(3)

(c) Veronderstel 'n aanvanklike populasie van 200 en gebruik jou vergelyking in vraag (b) hierbo om 'n beraming vir die getal siklusse/iterasies te bepaal wat dit sal neem voor die tempo van verandering in die populasie met tyd begin afneem.

(4)
[16]

IEB Copyright © 2023

VRAAG 5



In 'n sekere woudgebied is die gryswolf ingevoer om die stygende getal witsterttakbokke te balanseer. Aanvanklik was daar 500 takbokke en 20 wolwe. Die vroulike takbokke, wat 60% van die prooipopulasie uitmaak, skenk geboorte aan een lam per jaar, met 'n oorlewingskoers van 80%. Daar is 'n gelyke getal manlike en vroulike wolwe en na raming het 50% van die vroulike populasie van die wolwe een werpsel van drie kleintjies per jaar. Elke wolf sal gemiddeld 10 takbokke per jaar doodmaak. Daar word voorspel dat die getal wolwe op 'n ewewigpopulasie van dieselfde getal as die beginpopulasie tot stilstand sal kom en die takbokke sal op 95 stabiliseer.



Bereken die volgende:

(a) Die intrinsieke groeikoers van die takbokke per jaar.

(5)

(b) Die koers van suksesvolle aanvalle deur wolwe op die takbokke.

(3)

(c) Die waarde van *f*, die doeltreffendheidskoëffisiënt van prooivleisbenutting.

(4)

IEB Copyright © 2023

(d) Die benaderde leeftyd van die wolwe in jare.

(5)

(e) Die dravermoë van die omgewing.

(6)
[23]

VRAAG 6

Die ry wat met die formule $T_n = aT_{n-1} - T_{n-2} + b$ geassosieer word, begin:

3; 5; 9; 15; ……

(a) Bereken *a* en *b*.

(7)

(b) Skryf die volgende twee terme van die ry neer.

(3)

(c) Bepaal 'n ekwivalente eersteordeverskil-vergelyking vir die vergelyking wat gegee is.

(3)
[13]

Totaal vir Module 3: 100 punte

IEB Copyright © 2023

MODULE 4 MATRIKSE EN GRAFIEKTEORIE

VRAAG 1

1.1 Matriks:

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \\ 9 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Waarom is die determinant nul?

(2)

1.2 $$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & -p \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Skryf A^T, die getransponeerde matriks A.

(3)

(b) Toon dat det (A) = det (A^T).

(6)

IEB Copyright © 2023

(c) Indien $p = 7$, evalueer AA^T.

(4)

(d) Indien B 'n vierkantige matriks is, sal BB^T altyd simmetries en vierkantig wees?

(2)
[17]

IEB Copyright © 2023

VRAAG 2

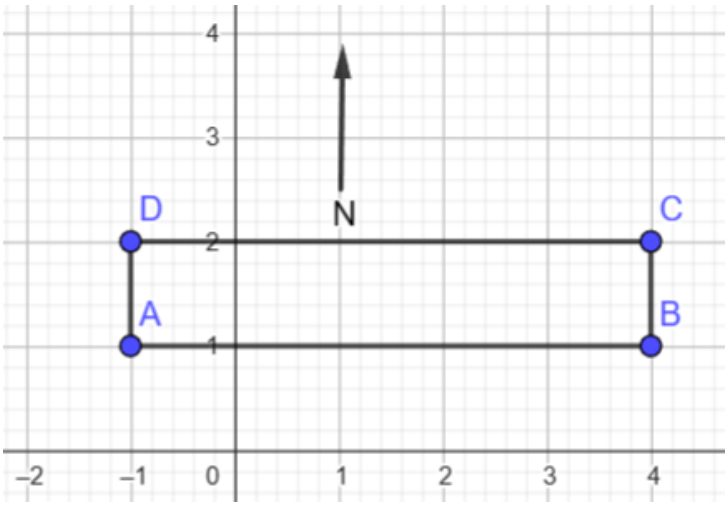
Los x; y; z gelyktydig op deur ryreduksie te gebruik.

$$x + 3y - 2z = -7$$
$$4x + y + z = 5$$
$$2x - 5y + 7z = 19$$

[10]

IEB Copyright © 2023

VRAAG 3



'n Huis met 'n grondvlak gedefinieer deur matriks $M = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

word gegee met die voorkant van die huis (DC) wat tans noord front.

3.1 'n Argitek strek die grondvlak van die huis met 'n skaalfaktor van 2 parallel aan die *y*-as en met die *x*-as invariant. Wat is die nuwe grondvlak?

(4)

3.2 Watter uitwerking het die strekking op die oppervlakte van die huis?

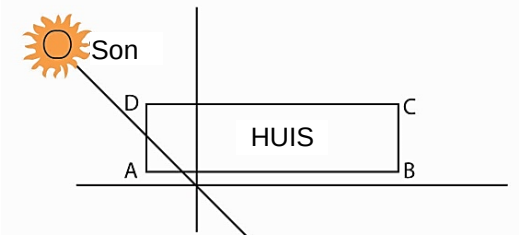
(1)

IEB Copyright © 2023

3.3 Watter matriks moet gebruik word om die gestrekte huis in Vraag 3.1 te skuif sodat die agtermuur (AB) weereens op die lyn $y = 1$ lê? Gee die matriks vir die nuwe grondvlak.

(3)

3.4 Die eienaars van die huis wil die oorspronklike grondvlak, matriks M, van die huis roteer sodat lyn DC na die son kyk. Die son kom op en gaan onder op die lyn $y = \frac{-3x}{2}$. Skep 'n matrikstransformasie om die huis te roteer sodat dit loodreg op die lyn van die son lê. Gee die nuwe matriks vir die grondvlak.



(9)
[17]

VRAAG 4

4.1 Die volgende nodusmatriks word gegee:

	A	**B**	**C**	**D**	**E**
A	–	1	–	1	–
B	1	–	1	–	1
C	–	1	–	–	–
D	1	–	–	–	–
E	−	1	–	–	–

(a) Voltooi die komplementnodusmatriks in die matriks hieronder.

	A	**B**	**C**	**D**	**E**
A					
B					
C					
D					
E					

(5)

(b) Teken die grafiek wat die komplement van die nodusmatriks verteenwoordig.

(3)

IEB Copyright © 2023

(c) Verduidelik waarom 'n Euler-pad nie moontlik is in die grafiek van vraag (b) hierbo nie.

(2)

4.2 Verduidelik waarom 'n grafiek met 6 nodusse, onderskeidelik van graad 1, 2, 2, 3, 4, 4 nie 'n boom kan wees nie.

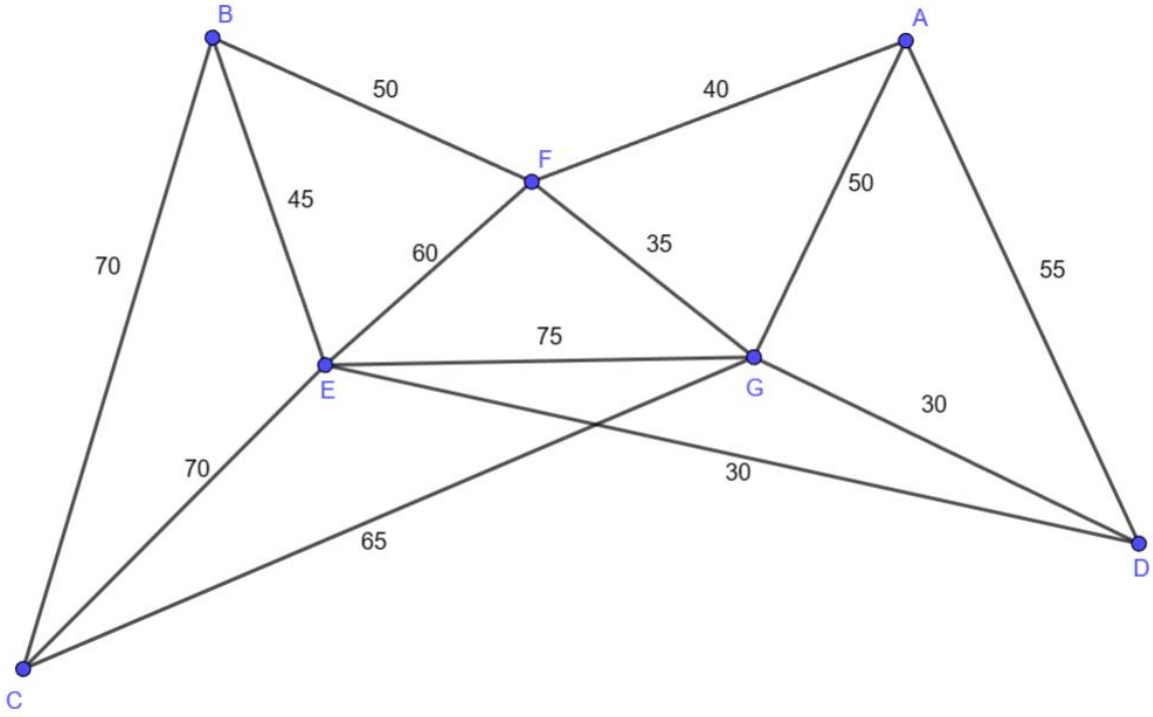
(3)
[13]

IEB Copyright © 2023

VRAAG 5

5.1 In die Krugerwildtuin is daar slegs 2 (twee) kragstasies by 'n spesifieke kampterrein. Een is by E en een by G. Nuwe tentpersele word opgerig by A, B, C, D en F. Die getal op elke skakel is die afstand tussen die nuwe tentpersele in meter. Al die tentpersele moet óf direk óf indirek met kabels verbind word. Die kabel EG moet vir veiligheid ingesluit word.

Gebruik Kruskal se algoritme om die minimum lengte kabel wat gebruik moet word, te bepaal. Noem die volgorde waarin jy die skakels kies sowel as die lengte van die minimum spanboom duidelik.

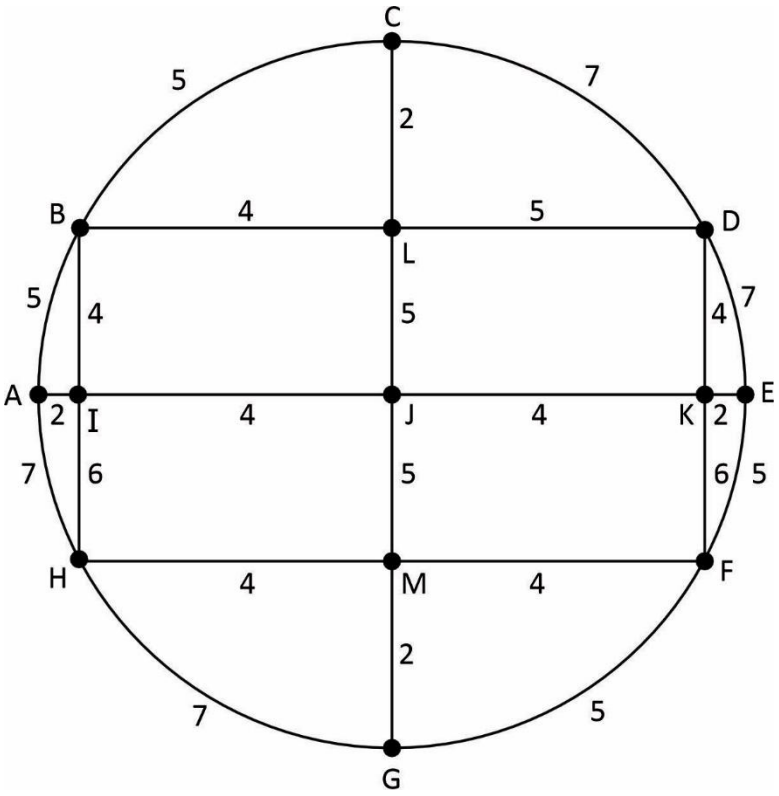


(10)

IEB Copyright © 2023

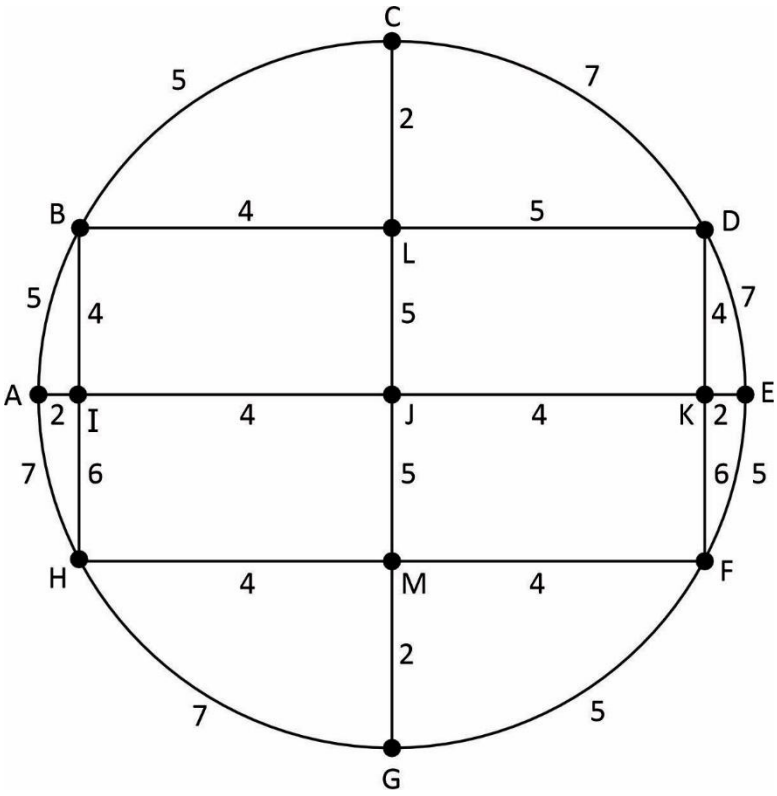
5.2 (a) 'n Toeris besoek 'n sirkelvormige museum. Omdat sy min tyd het en ook nie so baie in hierdie museum belang stel nie, wil sy die kortste pad bepaal om elke gang te besigtig. Die skakels verteenwoordig die gange.

Die ingang en uitgang is by punt A. Bepaal die kortste pad wat by A begin en eindig.



(9)

(b) Die toeris bevind haar by G en die inligtingsentrum is by I. Die toeris benodig dringend die badkamer, maar weet nie waar dit is nie. Sy gaan eers na I toe en vind uit die damesbadkamer is by D. Gebruik Dijkstra se algoritme om die kortste pad na die damesbadkamer (D) via die inligtingstoonbank (I) vir die toeris by G te bepaal. Toon duidelike bewys van jou berekeninge, wat die beëindiging van nielewensvatbare roetes insluit. Maak seker dat jy jou finale roete sowel as die lengte daarvan aandui.



(12)
[31]

IEB Copyright © 2023

VRAAG 6

'n *Nulpotente* matriks, N, is sodanig dat $N.N = 0$

'n *Idempotente* matriks, A, is sodanig dat $A = A^2 = A^3 = ... = A^P$

6.1 Indien B = $\begin{pmatrix} ab & b^2 \\ -a^2 & -ab \end{pmatrix}$, toon dat B nulpotent is.

(4)

6.2 (a) Gegee: A = $\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$

Bepaal die minimum waarde van P, as A idempotent is.

(3)

(b) Bewys dat $(I - A)^2 = I - A,$ indien A idempotent is.

(5)

[12]

Totaal vir Module 4: 100 punte

IEB Copyright © 2023

BYKOMENDE SPASIE (ALLE VRAE)

ONTHOU OM DUIDELIK BY DIE VRAAG AAN TE DUI DAT JY DIE BYKOMENDE SPASIE GEBRUIK HET OM TE VERSEKER ALLE ANTWOORDE WORD NAGESIEN.

IEB Copyright © 2023

IEB Copyright © 2023

IEB Copyright © 2023

IEB Copyright © 2023