Plak asseblief die strepieskode-etiket hier

PUNTE-TOTAAL

INTERNASIONALE SEKONDÊRE SERTIFIKAAT-EKSAMEN
NOVEMBER 2023

VERDERE STUDIES WISKUNDE (STANDAARD): VRAESTEL I

EKSAMENNOMMER

Tyd: 2 uur 200 punte

LEES ASSEBLIEF DIE VOLGENDE INSTRUKSIES NOUKEURIG DEUR

1. Hierdie vraestel bestaan uit 20 bladsye en 'n Inligtingsboekie van 4 bladsye (i–iv). Maak asseblief seker dat jou vraestel volledig is.
2. **Beantwoord AL die vrae op die vraestel en lewer dit aan die einde van die eksamen in. Onthou om jou eksamennommer neer te skryf in die spasie wat voorsien word.**
3. Nieprogrammeerbare en niegrafiese sakrekenaars mag gebruik word, tensy anders aangedui.
4. Al die nodige berekeninge moet duidelik getoon word en handskrif moet leesbaar wees.
5. Diagramme is nie op skaal geteken nie.
6. Rond jou antwoorde af tot twee desimale syfers, tensy anders aangedui.
7. EEN blanko bladsy (bladsy 20) word aan die einde van die vraestel ingesluit. Gebruik hierdie bladsy indien jy te min spasie vir 'n vraag het. Dui die nommer van jou antwoord duidelik aan indien jy hierdie ekstra spasie gebruik.

SLEGS VIR KANTOORGEBRUIK: NASIENER MOET PUNTE INSKRYF

	V1	V2	V3	V4	V5	V6	V7	V8	V9	V10	V11	V12	Totaal
Punt													
Nasiener Voorletters													
Gemodereerde Punt													
Moderator Voorletters													
Vraagtotaal	**38**	**12**	**10**	**22**	**18**	**14**	**12**	**12**	**12**	**10**	**24**	**16**	**/200**

IEB Copyright © 2023

VRAAG 1

1.1 Los op:

(a) $\ln(2+e^{-x})=2$. Laat jou antwoord in die vorm $x=\ln(\ldots.)$.

(8)

(b) $|2x+3|=3x+4$

(6)

IEB Copyright © 2023

1.2 Gee in standaardvorm $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ 'n vierdegraadsvergelyking wat $x = 2 + \sqrt{3}$ en $2 - i$ as wortels het. Die waardes van *a, b, c, d* en *e* moet rasionaal wees.

(8)

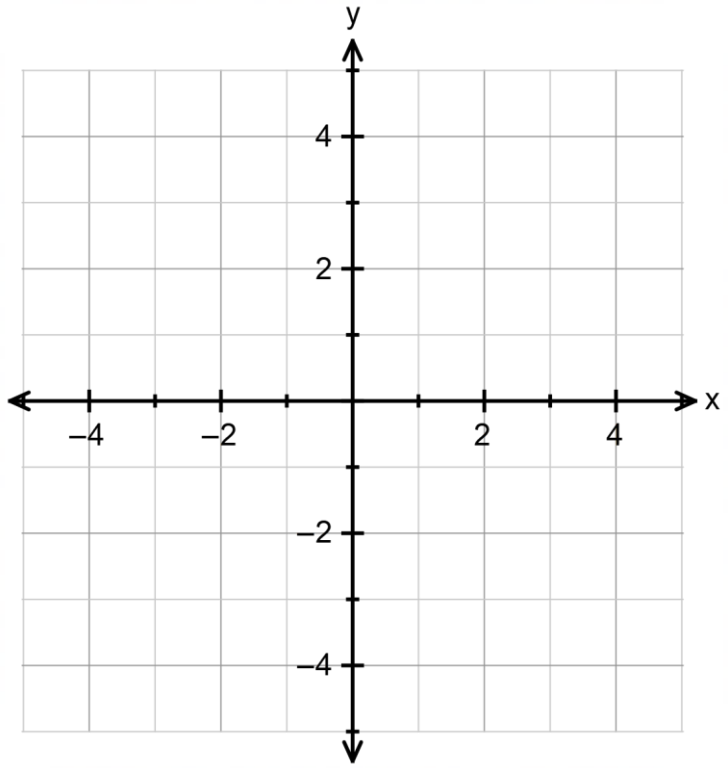
1.3 Bepaal positiewe reële waardes van *a* en *b* indien:

$$(a + bi)(b + i) = (2b + a)i$$

(8)

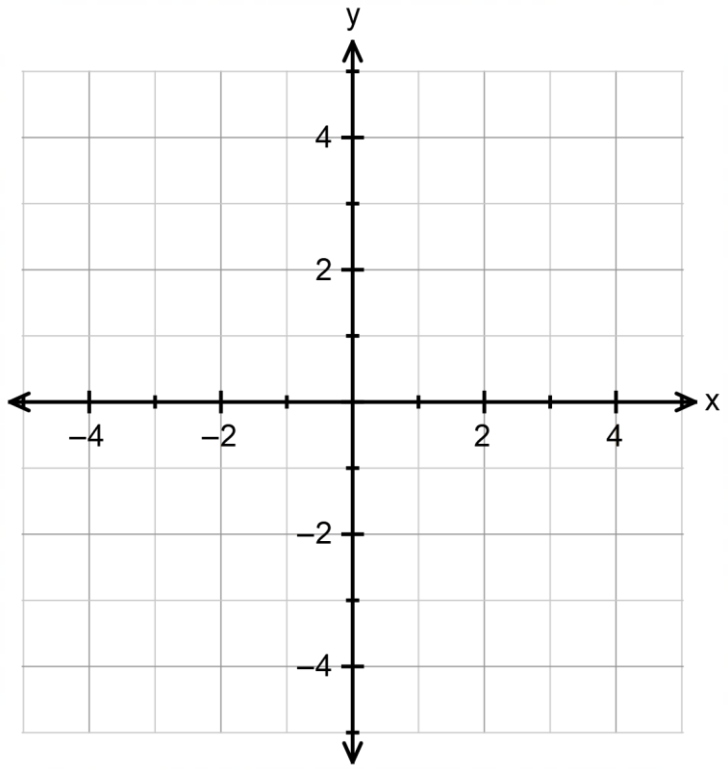
1.4 Skets die volgende funksies op die asse wat voorsien word. Jy moet die vergelykings van enige asimptote gee en die asimptote teken, en ook enige afsnitte met die asse toon.

(a) $y = e^{-x} - 1$



(4)

(b) $y = \ln(x + 1)$



(4)
[38]

IEB Copyright © 2023

VRAAG 2

Gebruik volledige induksie om te bewys dat:

$-1+4-9+16-25+.....(-1)^n n^2 = \frac{(-1)^n n(n+1)}{2}$ vir alle $n \in \mathbb{N}$

[12]

VRAAG 3

Bepaal $\frac{d}{dx}\sqrt{3x}$ uit eerste beginsels.

[10]

IEB Copyright © 2023

VRAAG 4

Beskou die funksie $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 7}{x - 2}$.

(a) Bepaal, met klassifikasie, die vergelykings van enige asimptote.

(6)

(b) Regverdig wiskundig waarom die funksie nie enige *x*-afsnitte het nie.

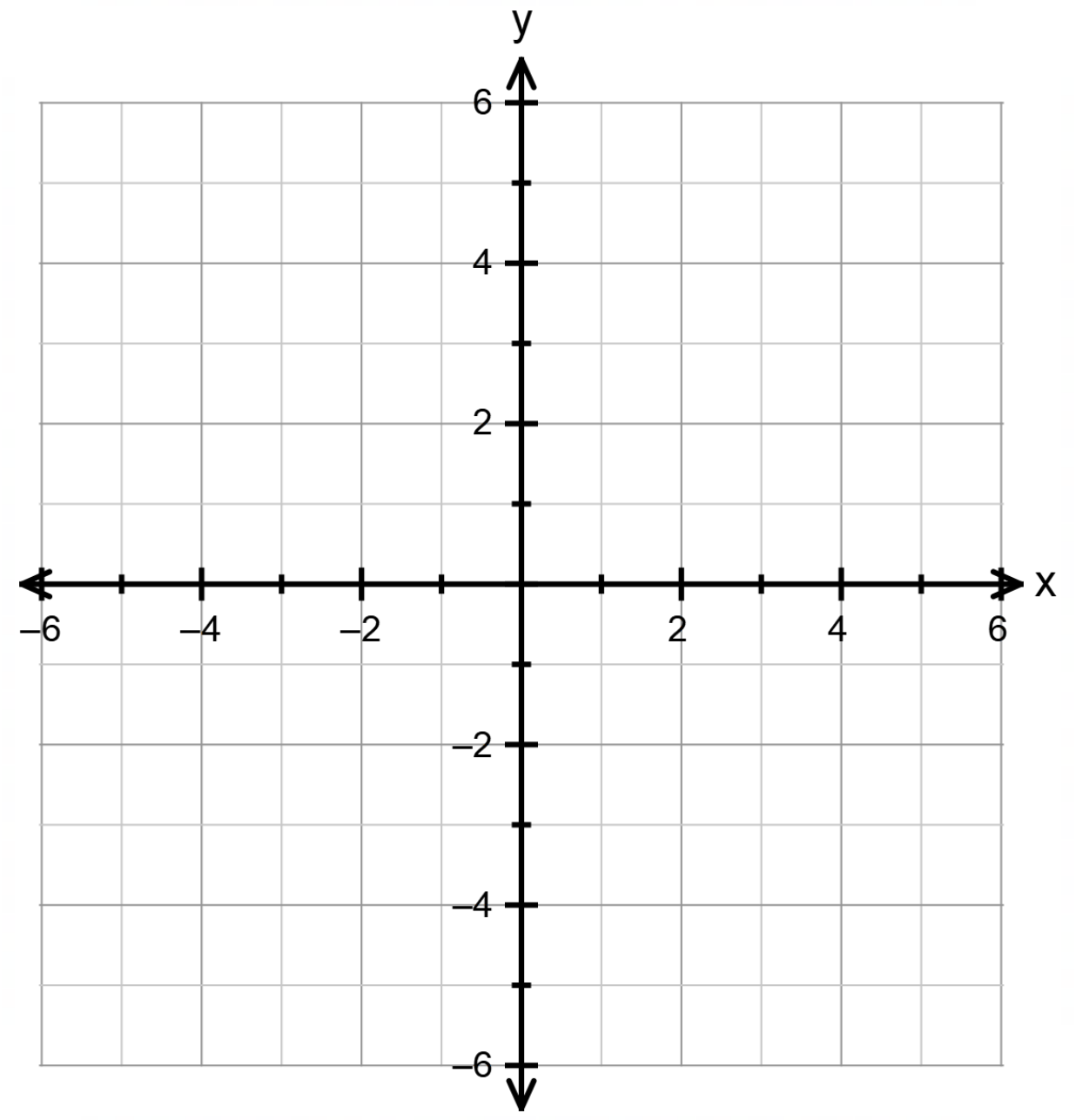
(4)

(c) Bepaal die koördinate van enige stasionêre punte.

(8)

IEB Copyright © 2023

(d) Teken die grafiek van *f* op die asse wat voorsien word en toon alle punte van belang. Jy moet enige asimptote teken en benoem.



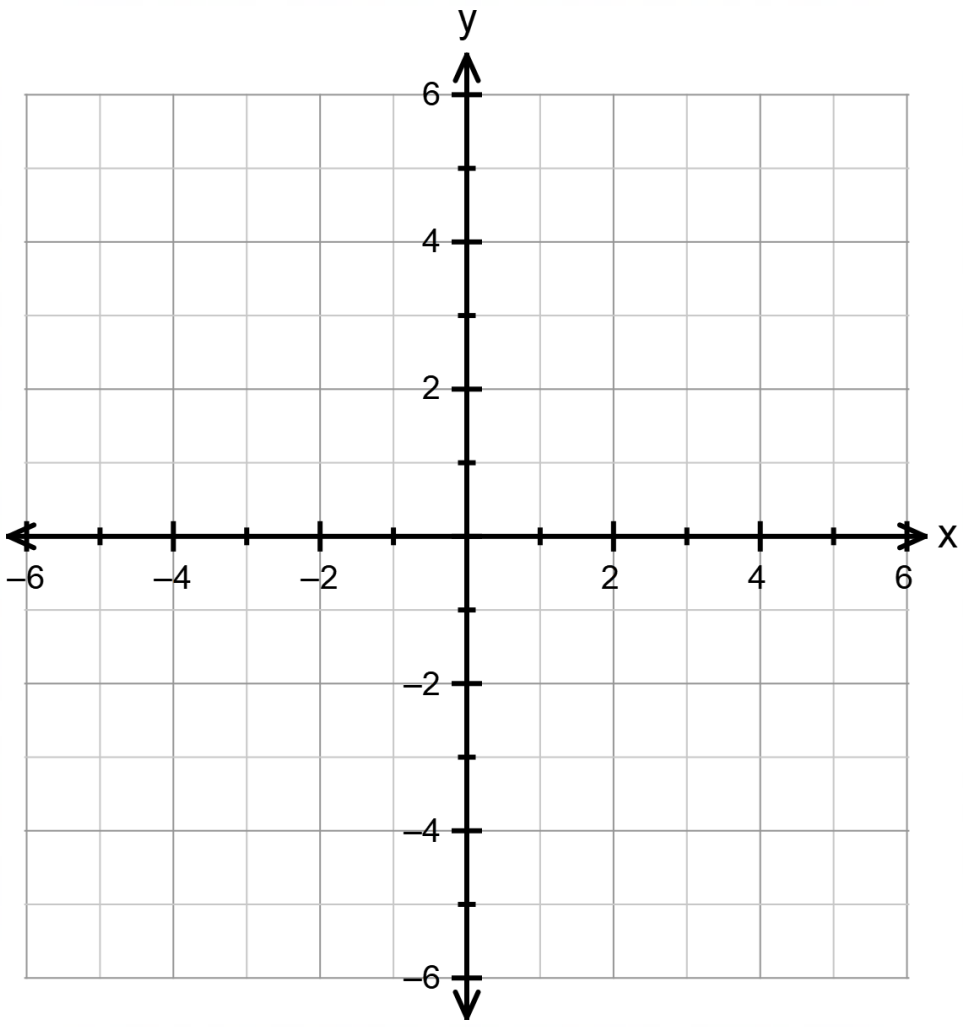
(4)
[22]

IEB Copyright © 2023

VRAAG 5

5.1 Teken op die asse wat voorsien word 'n **funksie** *g* wat die volgende bevredig:

- *g* is kontinu vir alle waardes van *x* behalwe by $x = -3$ en $x = 2$
- $g(-3) = 4$ en $\lim_{x \to -3} g(x)$ bestaan
- $g(2) = 1$ en $\lim_{x \to 2^-} g(x) = 1$, maar daar is 'n sprongdiskontinuïteit by $x = 2$
- *g* is ook nie differensieerbaar by $x = 1$ nie



(10)

5.2 Druk die volgende bewerings uit deur **wiskundige notasie te gebruik**:

(a) Die linker- en regterlimiet van *g* by $x = a$ is ongelyk.

(2)

(b) *h* is nie differensieerbaar by *p* nie ten spyte daarvan dat dit kontinu is by $x = p$.

(2)

5.3 Antwoord waar of onwaar op elkeen van die volgende bewerings:

(a) Indien 'n funksie differensieerbaar is by 'n punt, is dit kontinu by daardie punt.

(2)

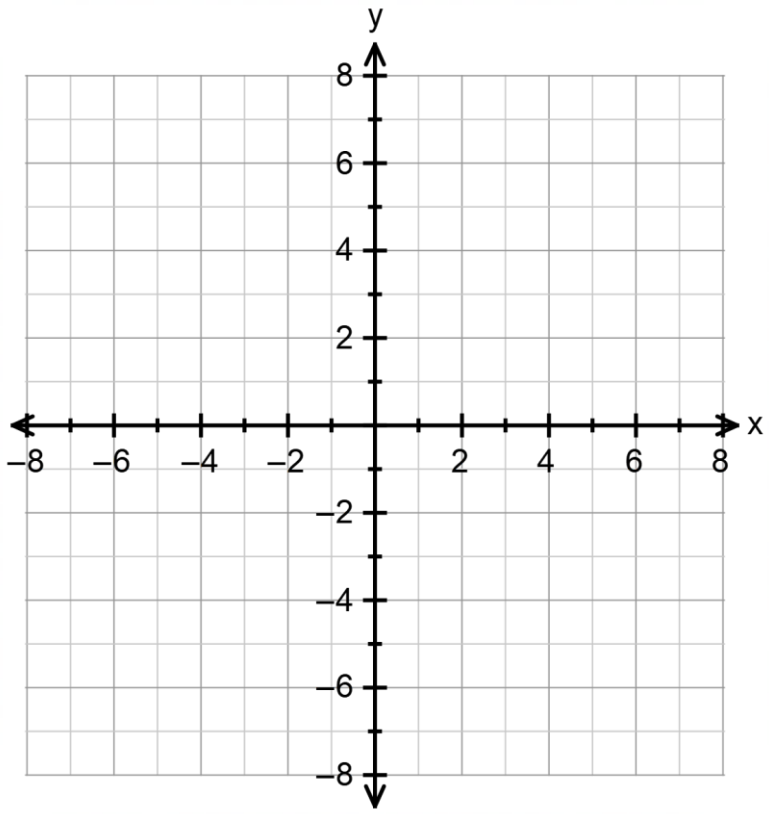
(b) Indien 'n funksie nie differensieerbaar is by 'n punt nie, is dit nie kontinu by daardie punt nie.

(2)
[18]

IEB Copyright © 2023

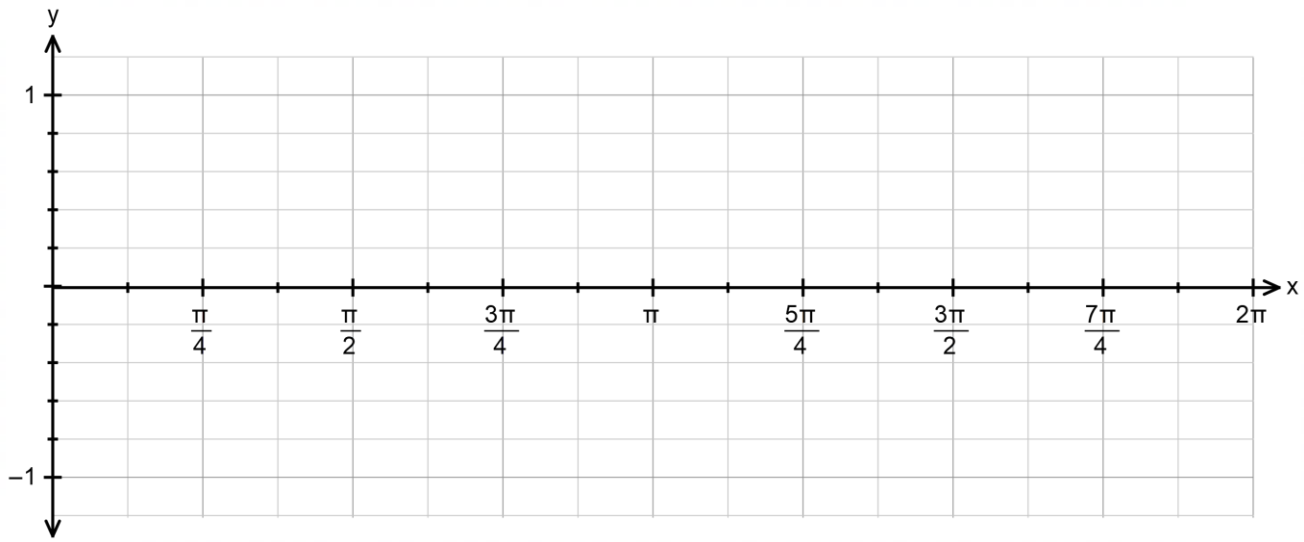
VRAAG 6

6.1 Gebruik die asse hieronder om $|x-2|-5 \geq -|x-1|$ op te los deur die **grafieke van twee funksies** te skets. Jy moet die grafieke wat jy geteken het met hul vergelykings benoem.



(8)

6.2 Teken die grafiek van $|y| = \sin x$ op die asse wat voorsien word en toon alle punte van belang.



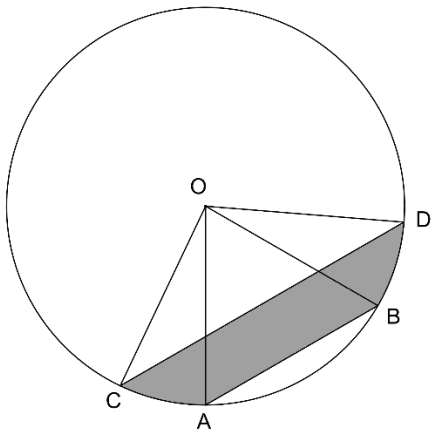
(6)
[14]

IEB Copyright © 2023

VRAAG 7

In die diagram hieronder is driehoek AOB gelyksydig met sye van 1 eenheid.
O is die middelpunt van die sirkel en $CD = \sqrt{3}$ eenhede.

Bepaal die gearseerde oppervlakte.

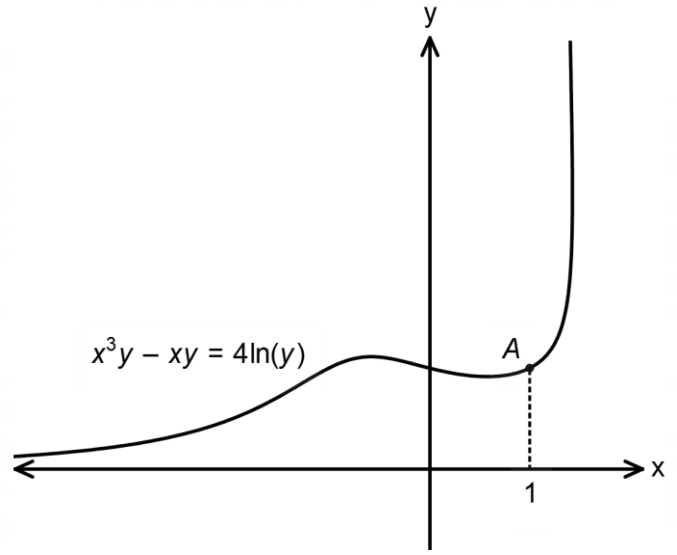


[12]

IEB Copyright © 2023

VRAAG 8

'n Gedeelte van die grafiek van die implisiet gedefinieerde verwantskap $x^3y - xy = 4\ln(y)$ word hieronder getoon.



(a) Bepaal die *y*-koördinaat van punt A en toon alle berekeninge.

(4)

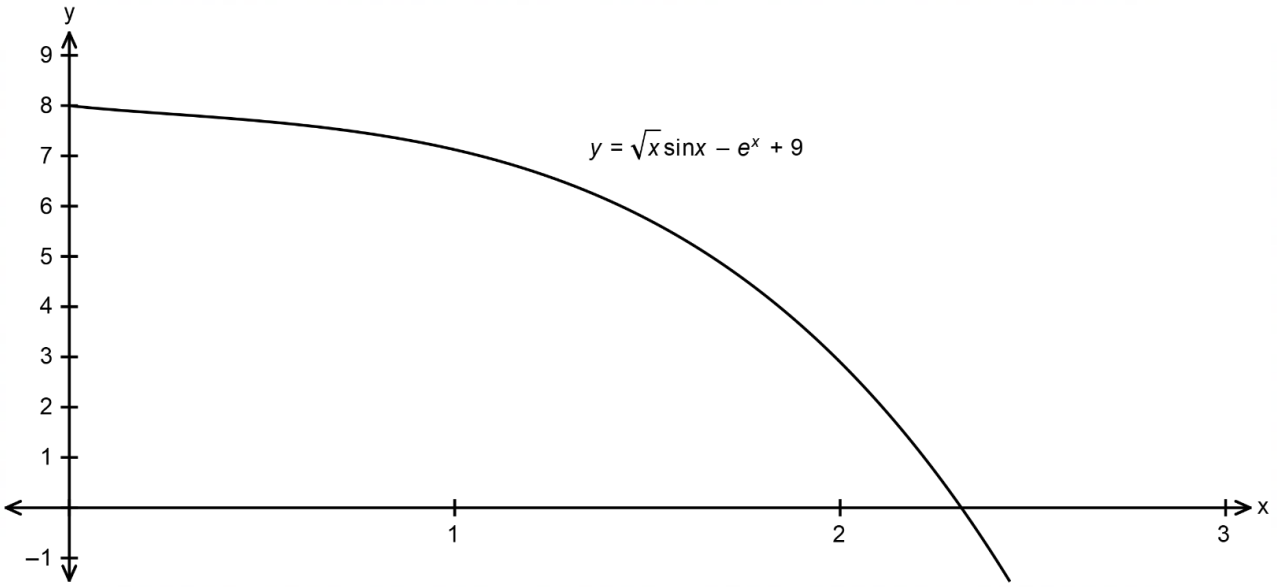
(b) Bepaal die vergelyking van die raaklyn aan die kromme by die punt A.

(8)
[12]

VRAAG 9

Die funksie $f(x) = \sqrt{x}\sin x - e^x + 9$ word hieronder getoon.

Gebruik die Newton-Raphson-metode om die *x*-afsnit tot 5 desimale plekke te bepaal deur $x_0 = 2$ as 'n aanvanklike raaiskoot te gebruik.



Jy moet die volgende toon:

- die iteratiewe formule wat jy gebruik
- x_1 tot 5 desimale plekke

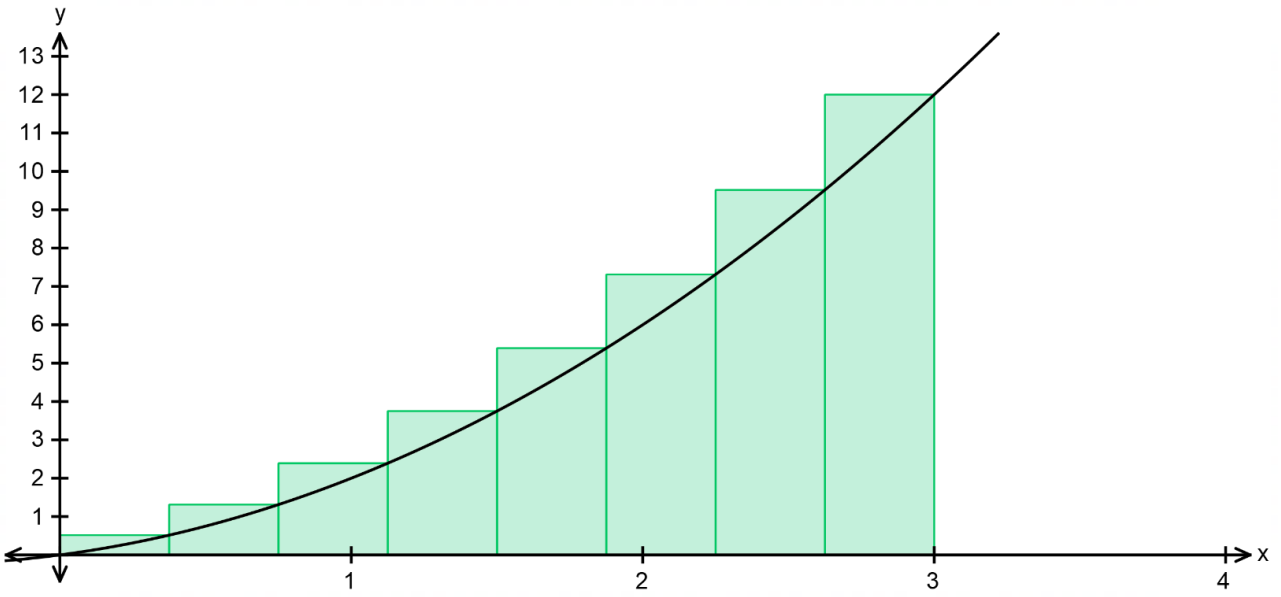
Jy hoef **nie** al jou benaderings neer te skryf nie.

[12]

IEB Copyright © 2023

VRAAG 10

Kofi probeer om die oppervlakte onder die kromme $y = x^2 + x$ van $x = 0$ tot $x = 3$ uit te werk deur dit in reghoeke te verdeel soos getoon.



Hy het korrek uitgewerk dat wanneer hy *n* reghoeke gebruik, die oppervlakte gegee word deur:

$$A = 13{,}5 + \frac{18}{n} + \frac{27}{6n^2}$$

Hy gebruik sy formule en eindig met 'n fout van $13\frac{2}{3}\%$. Hoeveel reghoeke het hy gebruik?

[10]

IEB Copyright © 2023

VRAAG 11

Bepaal die volgende integrale:

(a) $\int \sin^2 x\,dx$

(6)

(b) $\int x\sqrt{x+1}\,dx$

(8)

IEB Copyright © 2023

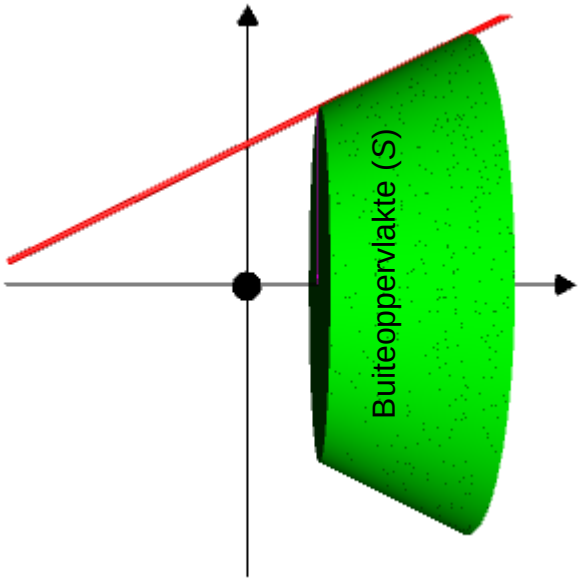
(c) $\int \frac{2x+3}{x^2+6x+9}dx$

(10)
[24]

VRAAG 12

Beskou die funksie $y = \frac{x}{2} + 4$.

(a) Dit word om die *x*-as geroteer van $x = 2$ tot $x = b$ en genereer 'n volume van $\frac{436\pi}{3}$ eenhede^3.



Bepaal die waarde van *b* deur 'n integraal op te stel en te evalueer.

(8)

IEB Copyright © 2023

(b) Die buiteoppervlakte (S) wat gegenereer word deur die grafiek van y van $x = a$ tot $x = b$ om die x-as te roteer, word gegee deur die formule:

$$S = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

Bepaal die buiteoppervlakte wanneer die funksie van $x = 2$ tot $x = 6$ om die x-as geroteer word.

(8)
[16]

Totaal: 200 punte

IEB Copyright © 2023

BYKOMENDE SPASIE (ALLE VRAE)

ONTHOU OM DUIDELIK BY DIE VRAAG AAN TE DUI DAT JY DIE BYKOMENDE SPASIE GEBRUIK HET OM TE VERSEKER ALLE ANTWOORDE WORD NAGESIEN.

IEB Copyright © 2023