GRAAD 12-EKSAMEN
NOVEMBER 2020

GEVORDERDEPROGRAM-WISKUNDE: VRAESTEL II

Tyd: 1 uur 100 punte

LEES ASSEBLIEF DIE VOLGENDE INSTRUKSIES NOUKEURIG DEUR

1. Hierdie vraestel bestaan uit 17 bladsye, 'n Antwoordblad van 1 bladsy (Module 4) en 'n Inligtingsboekie van 4 bladsye (i–iv). Maak asseblief seker dat jou vraestel volledig is.

2. Hierdie vraestel bestaan uit DRIE modules.

   Kies **EEN** van die **DRIE** modules:

   MODULE 2: STATISTIEK (100 punte) OF
   MODULE 3: FINANSIES EN MODELLERING (100 punte) OF
   MODULE 4: MATRIKSE EN GRAFIEKTEORIE (100 punte)

3. Nieprogrammeerbare en niegrafiese sakrekenaars mag gebruik word.

4. Al die nodige berekeninge moet duidelik getoon word en handskrif moet leesbaar wees.

5. Diagramme is nie op skaal geteken nie.

6. **Afronding van finale antwoorde:**

   MODULE 2: Vier desimale plekke, tensy anders aangedui.

   MODULE 3: Twee desimale plekke, tensy anders aangedui.

   MODULE 4: Twee desimale plekke, tensy anders aangedui.

IEB Copyright © 2020

MODULE 2 STATISTIEK

VRAAG 1

1.1 'n Versameling ou speelgoed wat ses treinstelle, vyf modelmotors en drie klassieke stukke speelgoed bevat, word by 'n veiling uitgestal. Drie van hierdie items word verkoop. Bepaal die waarskynlikheid dat al drie items wat verkoop is van dieselfde tipe is. (8)

1.2 Die resultate van 'n ewekansige opname toon dat 70% van studente na musiek luister terwyl hulle vir 'n assessering studeer.

(a) 'n Ewekansige steekproef van vyf studente word gekies. Bepaal die waarskynlikheid dat meer as drie studente na musiek luister terwyl hulle vir 'n assessering studeer. (8)

(b) 'n Tweede steekproef van 60 studente word gekies. Die stogastiese veranderlike X dui die getal studente aan wat na musiek luister terwyl hulle vir 'n assessering studeer.

(i) Gebruik 'n geskikte benadering en bepaal die waarskynlikheid dat minstens 40 studente uit die steekproef wat gekies is na musiek luister terwyl hulle vir 'n assessering studeer. (8)

(ii) Regverdig die gebruik van die benadering in (i) wiskundig. (2)

(iii) Waarom moet hierdie regverdiging in (ii) verskaf word om te verseker dat die benadering in (i) geskik is? (2)

[28]

VRAAG 2

2.1 Die stogastiese veranderlike X is normaal verdeel. Die gemiddelde is twee keer die standaardafwyking. $P(X > 5{,}2) = 0{,}9$ word gegee. Bepaal die gemiddelde en die standaardafwyking korrek tot twee desimale plekke. (8)

2.2 'n Seskantige dobbelsteen word van sydigheid verdink. Die dobbelsteen word 100 keer gegooi en daar word bevind dat dit 20 keer op 'n ses beland. [Let daarop dat 'n dobbelsteen 'n kubus is en dat elke sy 'n ander getal kolletjies daarop het wat wissel van een tot ses.]

(a) Bereken 'n 94%-vertrouensinterval vir p, die waarskynlikheid dat 'n dobbelsteen met enige gooi op 'n ses sal beland. (6)

(b) Gebruik jou antwoord op (a) om kommentaar te lewer daarop of die dobbelsteen moontlik sydig kan wees. (2)

[16]

IEB Copyright © 2020

VRAAG 3

3.1 'n Speler gooi drie veerpyltjies. Laat X die getal veerpyltjies voorstel wat die kol tref. Die waarskynlikheidsverdeling van X word in die tabel getoon.

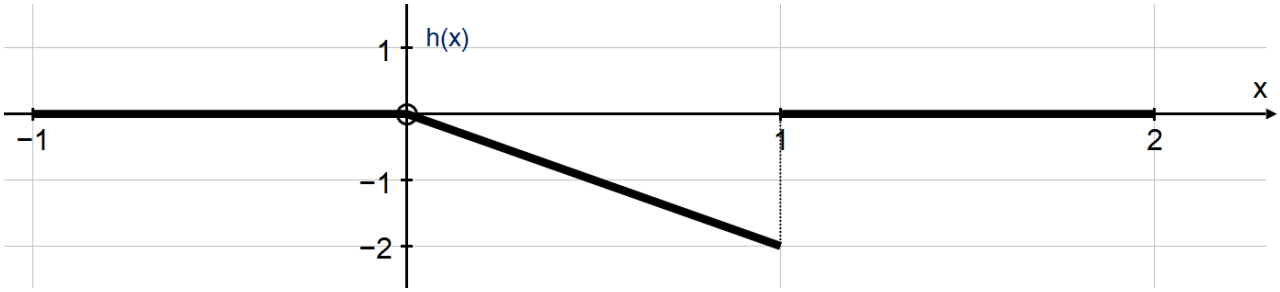
x	0	1	2	3
$P(X = x)$	0,5	0,35	p	q

(a) Bepaal die waardes van p en q indien gegee word dat die verwagte waarde van X 0,67 is. (6)

(b) Bepaal die standaardafwyking van X deur die waarskynlikhede hierbo te gebruik en toon alle berekeninge. (5)

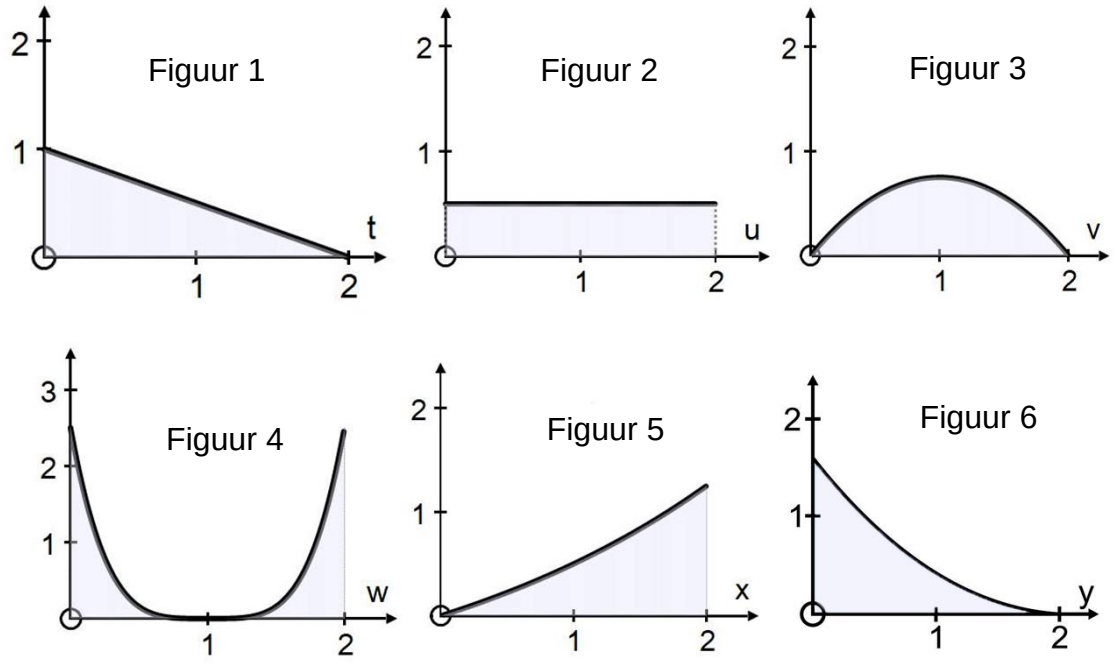
3.2 Die diagramme hieronder toon die grafieke van twee funksies, $g(x)$ en $h(x)$. Gee vir elkeen van die funksies g en h 'n rede waarom dit nie 'n waarskynlikheiddigtheidsfunksie kan wees nie.





(4)

3.3 Elkeen van die stogastiese veranderlikes t, u, v, w, x en y neem slegs waardes tussen 0 en 2 aan. Hul waarskynlikheiddigtheidsfunksies word in Figuur 1 tot 6 getoon.



(a) Watter van hierdie veranderlikes het die grootste mediaan? Regverdig jou antwoord. (3)

(b) Watter van hierdie veranderlikes het die grootste standaard-afwyking? Regverdig jou antwoord. (2)

(c) Gebruik Figuur 1 om $P(t < 0,5)$ te bepaal. (6)

[26]

IEB Copyright © 2020

VRAAG 4

Die vervaardiger van 'n bepaalde mobiele foon beweer dat die gemiddelde batterylewe 12 uur is. 'n Verbruikersorganisasie wou toets of die gemiddelde in werklikheid minder as 12 uur is. Hulle het 'n ewekansige steekproef van lede uitgenooi om die batterylewe van die mobiele fone aan te meld. Hulle het toe die steekproefgemiddelde bereken. Ongelukkig het 'n brand die rekords van hierdie toets vernietig, behalwe vir die volgende gedeeltelike dokument.

Toets van die gemiddelde battery foon	
Steekproefgrootte (n)	
Steekproefgemiddelde (*ure*)	11,7
Betekenisvol by die 5%-peil	Ja
Betekenisvol by die 2,5%-peil	Nee

4.1 Noem die nul- en alternatiewe hipotese wat vir hierdie toets gebruik sou word. (2)

4.2 Indien gegee word dat die batterylewepopulasie normaal verdeel is met 'n standaardafwyking van 0,5 uur, bepaal die stel moontlike waardes van die steekproefgrootte n. (10)
[12]

VRAAG 5

5.1 Beskou die speletjie waar twee mense klip-papier-skêr speel. Skêr wen papier, papier wen klip en klip wen skêr. Sam en Charlie speel 'n speletjie om te besluit wie na aandete die skottelgoed moet was. Die verloorder van die speletjie moet die skottelgoed was.

Daar word bevind dat Sam 36% van die tyd klip kies, 32% van die tyd papier en 32% van die tyd skêr. Charlie kies 22% van die tyd klip, 25% van die tyd papier en 53% van die tyd skêr. Indien die keuses onafhanklik van mekaar gemaak word, wat is die waarskynlikheid dat Sam die skottelgoed moet was? [Neem aan hulle speel slegs een rondte.] (8)

5.2 By 'n finale prysuitdelingseremonie is daar drie jaarlikse sportpryse, een vir Beste Sportman, een vir Sportman Meeste Verbeter en een vir Beste Sportmanskap, wat aan 'n groep van 20 studente toegeken moet word.

Bepaal die getal verskillende maniere waarop die drie pryse toegeken kan word indien:

(a) geen student meer as een prys mag wen nie. (5)

(b) geen student al drie pryse mag wen nie. (5)
[18]

Totaal vir Module 2: 100 punte

IEB Copyright © 2020

MODULE 3 FINANSIES EN MODELLERING

VRAAG 1

Mnr. Fourie begin onmiddellik en deponeer 'n bedrag van R1 500 per maand in 'n rekening met 'n effektiewe rentekoers van 7,75% per jaar. Na drie jaar word die bedrag tot *x* rand per maand verhoog met die rentekoers onveranderd. Na 'n totaal van sewe jaar is die saldo van die rekening R206 530,90.

1.1 Bepaal die saldo in die rekening na drie jaar korrek tot die naaste tien rand. (6)

1.2 Neem aan dat die saldo in die rekening na drie jaar R62 210 is en bereken *x* korrek tot die naaste rand. (9)

[15]

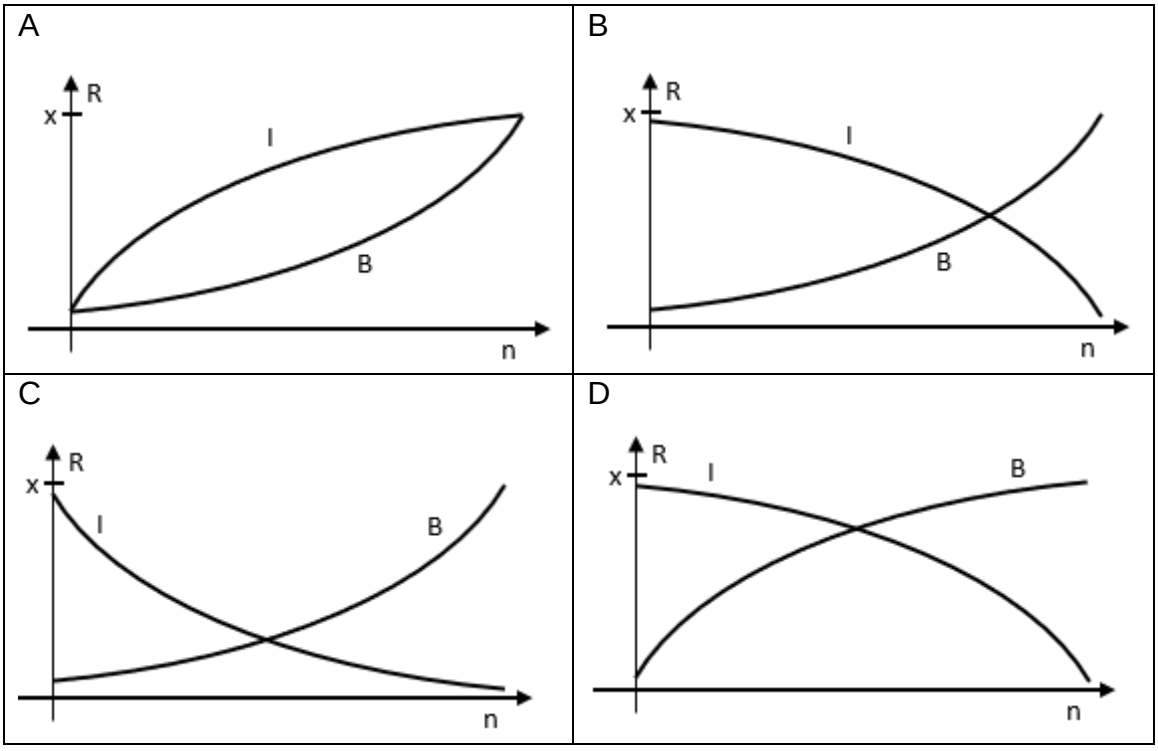
VRAAG 2

2.1 Beskou 'n lening met saamgestelde rente wat teen 'n maandelikse betaling van *x* rand oor *n* maande terugbetaal moet word.

Laat I = die deel van die maandelikse betaling wat gebruik word om rente te betaal.

Laat B = die deel van die maandelikse betaling wat die uitstaande saldo verminder.

Dui aan watter van die volgende grafieke die veranderende waarde van I en B oor die tydperk van die lening die beste beskryf en gee 'n geldige rede vir jou antwoord.



(4)

IEB Copyright © 2020

2.2 Nandi verkry 'n huislening wat oor 15 jaar geamortiseer moet word, met rente wat gehef word teen 11,25% per jaar, maandeliks saamgestel. Haar eerste betaling word na agt maande gedoen. Na vier jaar is die uitstaande saldo R317 279,95.

(a) Bereken die maandelikse betaling korrek tot die naaste rand. (5)

(b) Bereken die bedrag van die oorspronklike lening korrek tot die naaste sent. (7)

(c) Bepaal in rand die totale rente wat oor die eerste vier jaar betaal is, d.w.s. vandat die lening toegestaan is. (6)

(d) Nandi mis die 42ste en 43ste betaling.

Bereken die hersiene betaling wat vereis word na die betalings wat gemis is indien die tydperk van die lening onveranderd bly. (8)
[30]

VRAAG 3

'n Finansiële belegging kan deur die volgende rekursierelasie beskryf word, waar *F* in rand gegee word en *n* die getal jare is.

$F_n = aF_{n-1} + b;\quad F_0 = 15\,000$

$F_1 = 26\,200$ en $F_2 = 38\,296$ word ook gegee.

3.1 Interpreteer die betekenis van *b* en F_0 in die konteks van die belegging. (2)

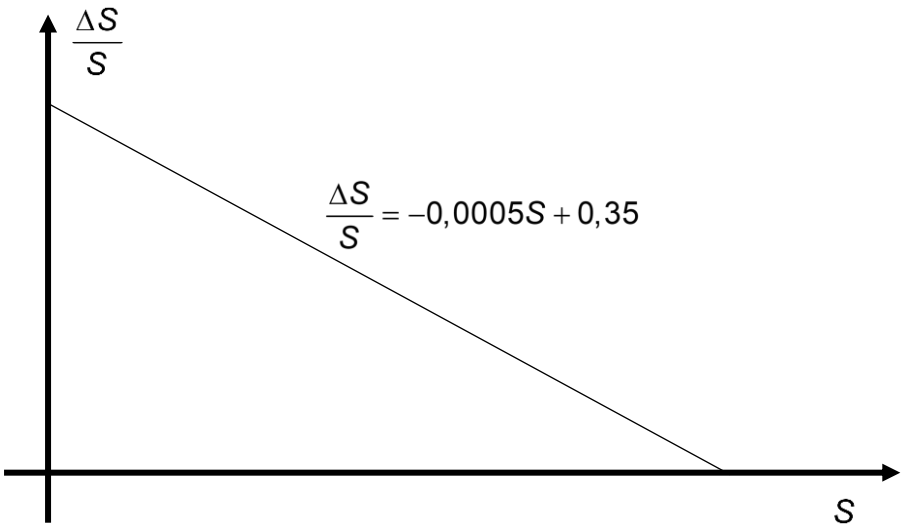
3.2 Bereken die waardes van *a* en *b* respektiewelik. (6)

3.3 Noem die rentekoers. (2)
[10]

IEB Copyright © 2020

VRAAG 4

Sandile boer met skape. Hy laat hulle natuurlik voortplant, onderhewig aan die beperkings van die plaasomgewing. Daar is geen roofdiere nie, maar ruimte en voedselhulpbronne sal verhoed dat hul getalle eksponensieel toeneem. Sandile voorspel dat die skape se getalle ooreenkomstig die volgende model sal toeneem, wat grafies geïllustreer word:



4.1 Watter tipe bevolkingsaanwas illustreer Sandile? (1)

4.2 Wat is die maksimum getal skape wat verwag word? (3)

4.3 Wat is die intrinsieke groeikoers? (2)

4.4 Skryf die groeimodel as 'n rekursieformule:

$S_{n+1} = ...$ waar n die getal jare is. (4)

4.5 As Sandile met 50 skape begin, na hoeveel jaar sal die skaapbevolking die helfte van die drakrag van die omgewing oorskry? (2)

[12]

IEB Copyright © 2020

VRAAG 5



5.1 In 'n sekere gebied van die Afrika-savanna vreet leeus hoofsaaklik sebras. Aangesien 'n verbod op stropery streng toegepas word, het die leeus self geen roofdiere nie. Die leeu- en sebrabevolking kan effektief gemodelleer word deur die Lotka-Volterra-rekursie-formules te gebruik:

$$L_{n+1} = L_n + f.bZ_nL_n - cL_n$$

$$Z_{n+1} = Z_n + aZ_n\left(1-\frac{Z_n}{K}\right) - bZ_nL_n$$



Die leeus en sebras het nou stabiele bevolkings bereik met ongeveer 1 000 sebras wat deur agt leeus gejag word.

Rekords stel voor dat wanneer 'n leeu 'n sebra teëkom, dit in 5% van die gevalle daartoe lei dat die sebra doodgemaak word.

Dit is bekend dat die intrinsieke groeikoers van die sebra-bevolking 0,8 (80%) per jaar is.

(a) Verduidelik die betekenis van die term bZ_nL_n. (2)

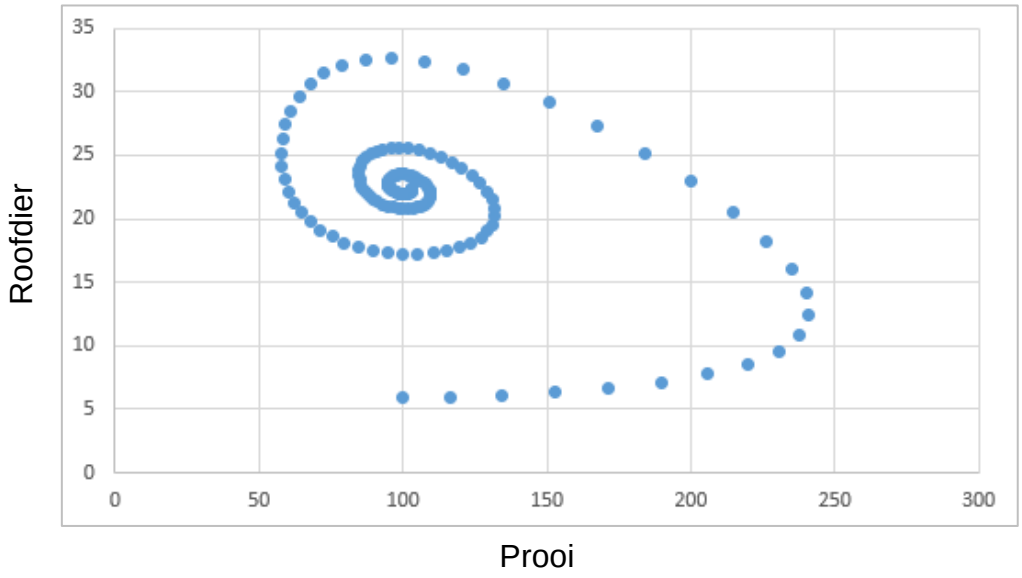
(b) Indien die stabiele bevolkings van die leeus en sebras onderskeidelik gegee word deur L_E en Z_E, bewys dat:

$$L_E = \frac{a}{b}\left(1-\frac{c}{Kfb}\right)$$ (10)

(c) Bepaal vervolgens of andersins die drakrag K. (5)

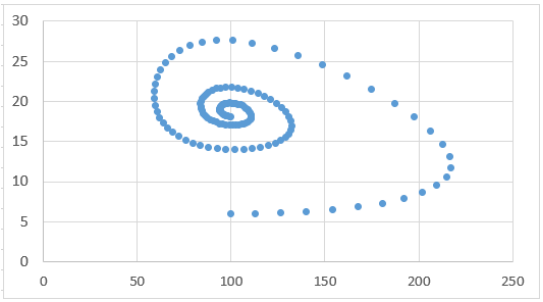
IEB Copyright © 2020

5.2 'n Fasestipping van 'n roofdier-prooi-model word hieronder gegee:

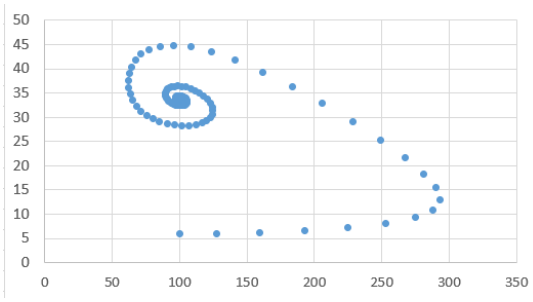


Die volgende fasestippings verteenwoordig dieselfde model met die waardes van die parameters wat aangepas is.

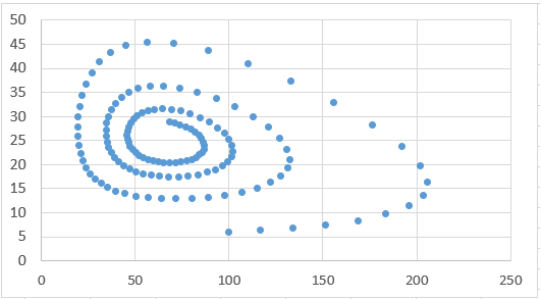
A



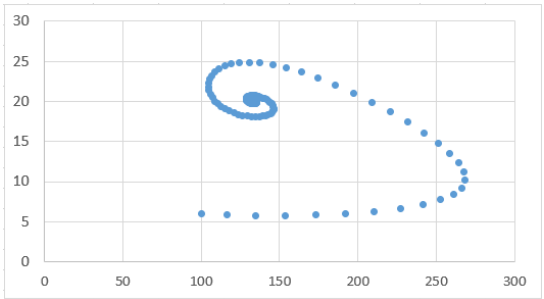
B



C



D



Dui aan watter van die grafieke stel die volgende voor:

(a) Slegs 'n toename in die parameter "*a*". (2)

(b) Slegs 'n toename in die parameter "*f*". (2)

[21]

IEB Copyright © 2020

VRAAG 6

Beskou 'n tweedeorde-differensievergelyking van die vorm:

$$u_n = au_{n-1} + bu_{n-2}$$

Die eksplisiete formule vir hierdie ry kan in die vorm

$$u_n = Ap^n + Bq^n$$

wees waar p en q die wortels is van die kwadratiese vergelyking:

$$x^2 - ax - b = 0$$

Die konstantes A en B kan dan opgelos word deur die aanvangswaardes u_0 en u_1 te gebruik.

6.1 Bepaal die eksplisiete formule wat verband hou met die differensievergelyking:

$$u_n = 8u_{n-1} - 12u_{n-2}; \quad u_0 = -1; \quad u_1 = 6$$ (7)

6.2 Bepaal die differensievergelyking wat verband hou met:

$$u_n = 3 \times 2^n + 5 \times 3^n$$ (5)

[12]

Totaal vir Module 3: 100 punte

IEB Copyright © 2020

MODULE 4 MATRIKSE EN GRAFIEKTEORIE

VRAAG 1

1.1 Gegee: $\begin{pmatrix} 2 & 8 & 3 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ y & 3 \\ x & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38 & 38 \\ 46 & 21 \end{pmatrix}$. Los op vir x en y. (7)

1.2 Om die volgende vergelykings

$$x + 2y - z = -1$$
$$2x + 6y + z = 7$$
$$5x + 7y - 4z = 9$$

gelyktydig op te los, pas ons Gauss-ryreduksie op die aangevulde matriks $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 6 & 1 & 7 \\ 5 & 7 & -4 & 9 \end{array}\right)$ toe.

Stap 1: $R_2 - 2R_1$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 9 \\ 5 & 7 & -4 & 9 \end{array}\right)$

Stap 2: $R_3 - 5R_1$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & 1 & 14 \end{array}\right)$

Stap 3: $R_1 - R_2$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & -10 \\ 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & 1 & 14 \end{array}\right)$

Sit die **Gauss-ryreduksie** voort om vir die veranderlikes x, y en z op te los. (8)

[15]

IEB Copyright © 2020

VRAAG 2

2.1 Gegee: $P = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}$. Bereken P', die beeld van P, deur slegs matriks-algebra te gebruik:

(a) een eenheid links en drie eenhede af verplaas. (3)

(b) In $y = -x$ gereflekteer. (4)

2.2 Bepaal 'n vereenvoudigde enkelmatriks wat 'n vorm eers met 'n faktor van $\frac{2}{\sqrt{2}}$ vergroot en dit dan 225° roteer. (8)

2.3 'n Lyn met eindpunte (3; 4) en (–1; 0) word onderskeidelik gereflekteer na punte $\left(\frac{-3+4\sqrt{3}}{2}; \frac{4+3\sqrt{3}}{2}\right)$ en $\left(\frac{1}{2}; \frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$. Bepaal die gradiënt van die refleksielyn. (12)

[27]

IEB Copyright © 2020

VRAAG 3

3.1 Dui aan of die volgende stellings waar of onwaar is en gee 'n rede indien onwaar:

(a) Indien jy in 'n gegewe vierkantige matriks 'n ry of 'n kolom met 'n nienulkonstante vermenigvuldig, word die determinant met hierdie selfde nienulkonstante vermenigvuldig. (2)

(b) Indien jy twee kolomme in 'n determinant omruil, sal die resulterende determinant dieselfde wees. (2)

(c) Die determinant van 'n matriks sal nul wees indien 'n ry 'n konstante veelvoud van 'n ander ry is. (2)

3.2 Gegee: $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 9 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Joe het die volgende eerste stap in die berekening van die determinant van 'n 4 × 4-matriks geproduseer:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 9 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = p\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{vmatrix} + q\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

(a) Joe het sy kennis van determinante toegepas om die proses om die determinant te bepaal aansienlik te vereenvoudig. Beskryf watter eienskap van determinante Joe toegepas het om sy eerste stap te produseer. (2)

(b) Bepaal die waarde van p en q. (2)

(c) Gebruik vervolgens matriksalgebra en toon dat die determinant 24 is. (4)

[14]

IEB Copyright © 2020

VRAAG 4

Kies die korrekste antwoord vir elke vraag:

4.1 Wat is die getal skakels wat in 'n volledige grafiek met *n* nodusse aanwesig is?

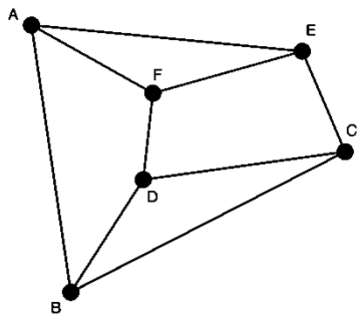
(a) $\frac{n(n+1)}{2}$

(b) $\frac{n(n-1)}{2}$

(c) n

(d) Die inligting wat gegee word, is onvoldoende. (2)

4.2 Is die volgende grafiek reëlmatig? Regverdig jou antwoord.



(2)

4.3 Die graad van elke nodus van 'n samehangende grafiek word hieronder gegee. Watter grafiek of grafieke is 'n eenvoudige Euler-kring?

(a) 2, 4, 6, 4, 2

(b) 4, 1, 2, 3, 4

(c) 2, 2, 4, 2, 2

(d) 3, 3, 4, 3, 3 (2)

4.4 Watter van die volgende grafieke is isomorf aan mekaar?

Fig.1:

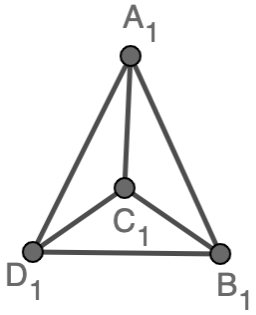


Fig.2:

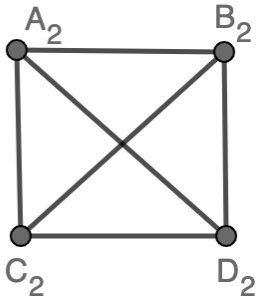
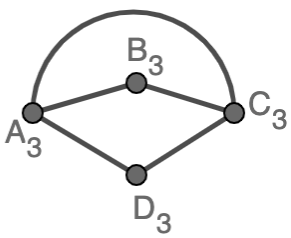


Fig.3:



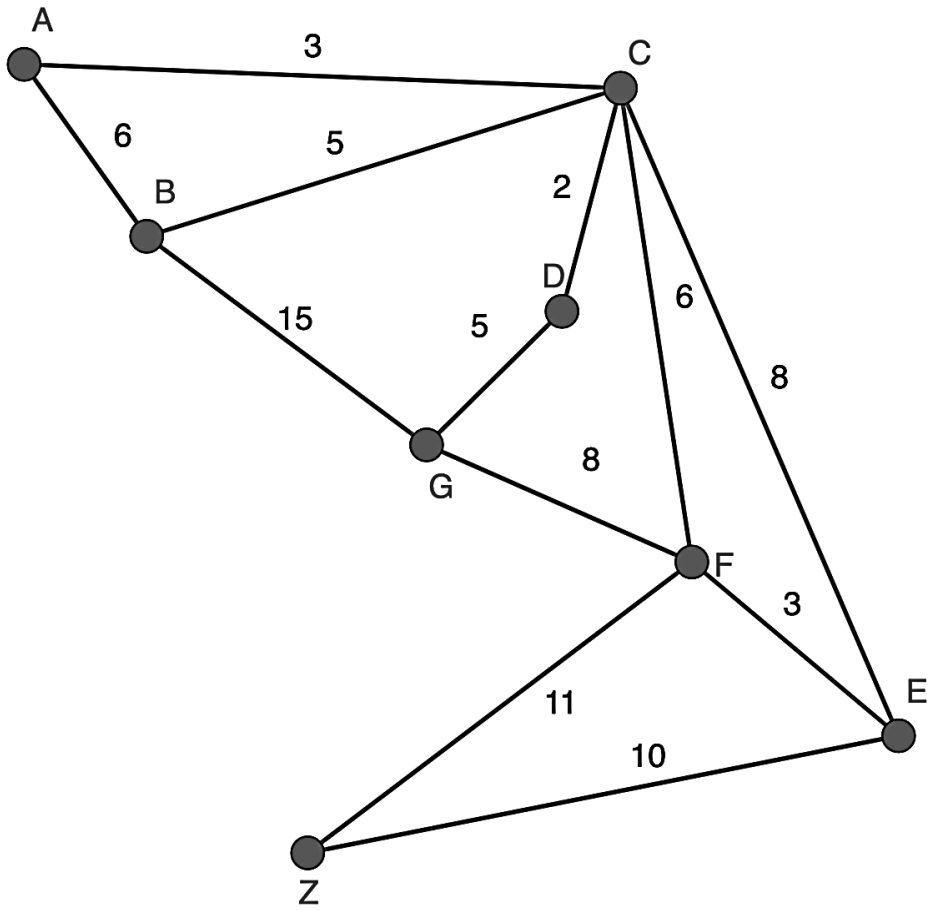
(2)
[8]

IEB Copyright © 2020

VRAAG 5

5.1 'n Moova-bestuurder is by A geparkeer en ontvang 'n versoek om vriende by liggings B, C, D, E, F en G op te laai met instruksies om hulle by bestemming Z af te laai. Die gewigte van die skakels verteenwoordig tyd in minute.

Bereken die onderste grenstyd van sy reis deur 'n toepaslike algoritme te gebruik en nodus D te verwyder.



(7)

5.2 'n Moova-bestuurder het 'n afsonderlike versoek om van A na Z te reis op die grafiek (kaart) hierbo. Help die bestuurder deur die **kortste roete** voor te stel. Toon duidelike bewys van jou berekeninge en redenasie. Antwoorde alleen sal geen krediet ontvang nie. (8)

5.3 Die Moova-bestuurder dink hy het 'n kortpad wat tyd t betref tussen nodusse B en F. Die bestuurder is onseker oor die presiese tyd van hierdie kortpad maar weet dat $2 < t \leq 4, t \in \mathbb{Z}$. Sal jy aanbeveel dat hy die kortpad neem? Regverdig jou antwoord. (3)

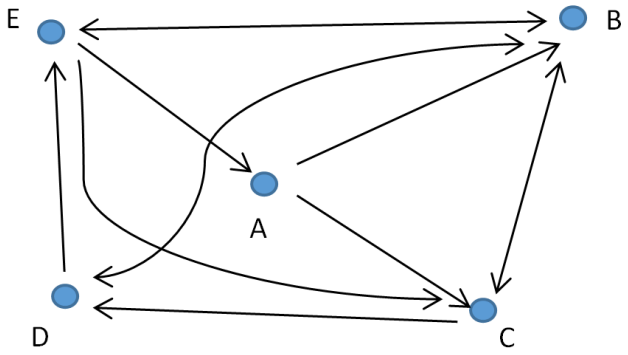
[18]

IEB Copyright © 2020

VRAAG 6

In 'n klein dorpie het sommige mense die selfoonnommers van ander, maar almal het nie elke persoon se nommer nie. Die gerigte grafiek hieronder stel hierdie verwantskappe voor.

'n ***Gerigte grafiek*** het 'n spesifieke rigting by die waarde van die skakel. In die grafiek hieronder kan dit wees dat Persoon A Persoon B se selfoonnommer het, maar Persoon B het nie Persoon A se selfoonnommer nie, dus het die skakel slegs 'n pyl (rigting) van Persoon A na B, en nie van B na A nie.



6.1 Voltooi die nodusmatriks op die ANTWOORDBLAD deur die grafiek te gebruik. Gebruik 'n 1 om 'n gerigte skakel voor te stel.

Van \ Na	A	B	C	D	E
A		1	1	0	0
B					
C					
D					
E					

(4)

6.2 Noem die persoon of persone met die meeste verbindings in die grafiek. (2)

6.3 Skep die gerigte komplement van die grafiek. (4)

6.4 (a) Neem aan dat as jy nie die selfoonnommer van 'n persoon het nie, daar 'n onafhanklike waarskynlikheid van 0,2 is vir elke skakel waarlangs beweeg word dat jy die selfoonnommer kan verkry. Ken gewigte toe aan die skakels van jou komplementgrafiek met die waarskynlikhede om die selfoonnommer van 'n nuwe persoon te verkry. (6)

(b) Watter twee mense het die kleinste waarskynlikheid om mekaar se selfoonnommers te hê? (2)

[18]

Totaal vir Module 4: 100 punte

IEB Copyright © 2020